教改实践成果性论文

DOI:10.16594/j.cnki.41-1302/g4.2015.02.011

2015 年 2 月　　洛阳师范学院学报　　Feb. ,2015
第 34 卷 第 2 期　　Journal of Luoyang Normal University　　Vol. 34 No. 2

实际问题驱动下的高等代数课程教学的实践探索

梁建秀

（晋中学院数学学院，山西晋中 030600）

摘　要：高等代数是数学专业的一门重要基础课，针对该课程理论严谨、概念多、内容抽象和广泛的实用性等特点，在教学中通过对实际问题的解决来引出概念或相关理论，将抽象、枯燥的概念和理论变得具体、鲜活，对激发学生学习高等代数的兴趣、培养学生的创新思维及数学应用意识、提高高等代数的教学质量产生了良好的效果.

关键词：高等代数；实际问题；矩阵

中图分类号：G642　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009－4970(2015)02－0127－04

数学理论来源于实际，许多概念和定理的产生并非都是抽象、枯燥的，很多理论方法都是从实际问题的研究中提升出来.在教学中，教师可以用相关的实际事例，展现如何从中提炼出数学概念，这种以实际问题驱动的课程教学方法，有助于学生理解数学概念、理论、思想和方法[1].

1　从实际问题入手引出矩阵的概念及其运算

矩阵是高等代数的一个主要内容，又是解决众多问题的有力工具.因此，深入理解矩阵及其运算的来龙去脉，对学好高等代数会起到有益的作用.特别是在授课时，穿插一些有趣味的例子，引导他们去学习新知识、新概念，会吸引学生的注意力，提高他们的学习兴趣，增强求知欲.比如在讲授矩阵理论之前，教师引入如下例子[2]：

引例 1. 赢得矩阵.学生在语文课本中都学过田忌和齐王赛马的故事，田忌以两胜一负赢得比赛.双方约定上、中、下 3 个等级的马，各选一匹进行比赛，共赛马 3 次.已知在同一等级马的比赛中，齐王之马可稳操胜券.齐王及田忌在排列赛马出场顺序时，各取下列 6 种策略（方案）之一：

（上，中，下）；（上，下，中）；（中，上，下）；（中，下，上）；（下，中，上）；（下，上，中）.

每一场比赛中，齐王赢加一分，齐王输减一分，共比赛三场.若将这 6 种策略依次从 1 到 6 编号，则可写出齐王的赢得矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

其中，行代表齐王策略，列代表田忌策略.比如，$a_{16}=-1$，说明齐王采用策略 6，即下、上、中顺序出马，而田忌采用策略 1，即上、中、下顺序出马.这样，我们从这个赢得矩阵里就很清晰地看出双方马的出场顺序和比赛结果.

类似这种矩形排列的数表，在自然科学及工程技术等领域经常用到.在数学上，这种数表叫矩阵.作为数学中一个重要且应用十分广泛的工具，让学生学好矩阵理论是很重要的一件事，应鼓励学生在学习矩阵时，发挥自己的才智，将抽象的数学概念和现实问题联系起来，为培养学生发现问题、解决问题的能力，提高学生的创新能力奠定基础.

收稿日期：2014－05－30
基金项目：山西省高等学校教学改革项目(J2013099)
作者简介：梁建秀(1970－)，女，山西盂县人，硕士，副教授.研究方向：基础数学及种群生态数学模型.

第 18 卷第 6 期
2015 年 11 月

高等数学研究
STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS

Vol. 18, No. 6
Nov., 2015

doi: 10.3969/j.issn.1008-1399.2015.06.007

向量组的线性相关性的若干应用

梁建秀

（山西省晋中学院 数学学院，山西 晋中 030600）

摘　要　对线性相关性在其他数学课程及社会生产实践中的应用进行了研究和探讨.

关键词　向量；线性相关性；应用

中图分类号　O151　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008-1399(2015)06-0013-03

Some Applications of Linear Correlation of Vector Groups

LIANG Jianxiu

(School of Mathematics, Jinzhong University, Jinzhong 030600, PRC)

Abstract: The linear correlation problem of vector group is one of the core contents in Higher algebra. Not only does it play a decisive role in Higher algebra, but also has the important applications in other branches of mathematics and other disciplines. This paper presents some examples showing the applications of the linear correlation of vector groups in mathematics and social sciences.

Keywords: vector; linear correlation; applications

在高等代数中，向量组的线性相关性起到了举足轻重的作用. 许多文献[1-4]对向量组的线性相关性的判定及其在高等代数中的重要作用进行了详细的分析与研究，但研究向量组的线性相关性在其他数学分支和领域中的应用方面的文献甚少. 本文将对其在其他数学课程及社会生产实践中的应用进行研究和探讨.

1　预备知识

向量组的线性相关性是线性相关与线性无关的统称，它刻画的是向量空间中向量之间的关系. 同时，由高等代数[5]中向量空间的定义可知，线性相关与线性无关的定义并不依赖于向量是数组、方程、n 维向量、多项式、还是矩阵. 只要这些向量能做加法和数乘运算并满足八条运算律，那么线性相关与线性无关的定义就适用.

定义[5]　设 V 是数域 F 上的向量空间，对于 V 中一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，若存在一组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，否则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

性质 1　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 中一组向量，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关当且仅当其中至少有一个向量可由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

性质 2　数域 F 上 n 维向量空间 V 中任意 n 个线性无关的向量都可作为 V 的一个基.

性质 3　数域 F 上 n 维向量空间 V 中每个向量都可经基唯一线性表示.

性质 4　数域 F 上 n 维向量空间中任意多于 n 个向量的向量组一定线性相关.

性质 5　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

以上只给出本文中所涉及到的有关向量线性相关的部分性质[5]，其它更多性质和结论参见有关高等代数教程. 在文献[6]中，通过研究线性方程组的解集大小与方程的个数的关系，引入了向量线性相关和线性无关的概念.

2　利用向量组的线性相关性求根式方程的解

例 1　求 $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2+x+5}=\sqrt{x^2-3x+13}$ 的实数解[1].

解　注意到

收稿日期：2014-04-10
基金项目：山西省高等学校教学改革项目(J2013099)
作者简介：梁建秀(1970－)，女，山西盂县人，硕士，副教授，主要从事高等代数教学及种群生态数学模型的研究. Email: Ljx6969@163.com

第29卷第3期 晋 中 学 院 学 报 Vol.29 No.3
2012年6月 Journal of Jinzhong University Jun. 2012

利用零点定理对几个自然现象的分析

梁建秀

（晋中学院 数学学院，山西 晋中 030600）

摘 要：结合数学建模的思想和方法，在数学概念与定理的教学中引入一些实际案例，既可充分调动学生学习的积极性，又可增强学生应用数学的主观意识，非常有利于数学教学质量的提高.

关键词：数学建模；应用；零点定理

中图分类号：O156.4 文献标志码：A 文章编号：1673-1808(2012)03-0017-02

0 引言

随着时代的发展，数学的应用正向更加广泛的领域渗透，并取得了一定的成果和经验. 中国科学院院士李大潜指出“数学教学中长期存在的矛盾现象是：一方面数学很有用，另一方面学生学了数学以后却不会用，而数学建模和数学实验正是架起这两者之间的桥梁”. 所以在数学教学，特别是大学基础数学的教学过程中，适当引入一些数学建模案例，结合数学建模思想和方法引导和鼓励学生去分析问题和理解问题，将所学知识应用到实际生活中，解决一些实际问题，必将有利于提高学生学习数学和应用数学的意识，有利于教师讲清重要的数学概念和方法的来龙去脉，将为教学质量的提高奠定必要的基础.

零点定理是高等数学的一个重要性质，它不仅在数学、物理等学科中具有十分广泛的应用，而且也被大量地应用于诸多实际问题的解决过程中，比如，可以体现在椅子在不平的地面上能否放稳[1]、拉橡皮筋、分割土地等实际问题中. 本文以零点定理为例，充分展示数学知识在实际生活中的渗透与应用，将一些似乎与数学无关的问题，结合数学建模的思想和方法分析问题，并利用零点定理巧妙地解释了一些生活中的实际问题和自然现象.

1 零点定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内连续，且 $f(a)f(b)<0$（即 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号），则在 (a, b) 内至少存在一点 $c\in(a, b)$，使 $f(c)=0$.

2 零点定理的巧妙应用——实际案例分析

案例1 相遇问题

问题的提出：某人早上8:00从山下旅店出发，沿一条路径上山，于下午5:00到达山顶并留宿. 次日早上8:00他沿同一条路径下山，下午5:00回到旅店. 试用数学模型说明：此人必在两天中同一时刻经过路径中同一地点.

模型的建立与求解：记其出发时刻为 $t=a$，到达目的地时刻为 $t=b$，从旅店到山顶的路径为 s，设某人上山路径的运动函数为 $f(t)$，下山路径的运动函数为 $g(t)$，t 是一天内时刻变量，即 $t\in[a, b]$，则 $f(t)$，$g(t)$ 在 $[a, b]$ 上是连续的.

作辅助函数 $F(t)=f(t)-g(t)$，则 $F(t)$ 也是 $[a, b]$ 上的连续函数.

[收稿日期]2011-11-05

[基金项目]晋中学院教学改革项目“将数学建模的思想与方法融入高等代数教学中的探索与实践”(Z12011jg03).

[作者简介]梁建秀(1970-)，女，山西盂县人，晋中学院数学学院，副教授，硕士，研究方向：生态数学模型.

文章编号:1674-0874(2018)06-0021-03

矩阵最小多项式的求法

李志秀
(晋中学院数学学院, 山西晋中 030600)

摘 要: 给出了求解矩阵最小多项式的主要方法: 特征多项式法、Jordan标准形法、向量法。

关键词: 最小多项式; 特征多项式法; Jordan标准形法; 向量法
中图分类号: O175.12 **文献标识码:** A

先给出求矩阵最小多项式的特征多项式法[1-3]。

定义1 设 $A\in P^{n\times n}$, 在数域 P 上的以 A 为根的多项式, 其中次数最低的最高次项系数为1的非零多项式称为矩阵 A 的最小多项式。

定理1 设 A 是数域 P 上的一个 n 级矩阵, $f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式, 则 $f(A)=0$。

定理2 设 $g(x)$ 是矩阵 A 的最小多项式, 那么 $f(x)$ 以 A 为根的充要条件是 $g(x)$ 整除 $f(x)$。

证明 充分性是显然的, 下面证明必要性。

设 $f(x)$ 以 A 为根, 因 $g(x)$ 是 A 的最小多项式, 可设 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$, 其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$, 所以 $f(A)=q(A)g(A)+r(A)$, 而 $g(A)=0$ 且 $f(A)=0$, 故 $r(A)=0$。如若 $r(x)$ 不恒等于0, 则有 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$, 这与 $g(x)$ 是最小多项式矛盾, 因此 $r(x)$ 恒为0。故 $g(x)|f(x)$。

定理3 设 A 是数域 P 上的一个 n 级矩阵, A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是互不相同的, $m_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是正整数, 且 $\sum_{i=1}^{s}m_i=n$, 则 A 的最小多项式为 $g(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$, 其中 k_i 是在 $1,2,\cdots,m_i(i=1,2,\cdots,s)$ 中使 $g(A)=0$ 的最小正整数。

证明 因为 $f(\lambda_i)=0(i=1,2,\cdots,s)$, 且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是互不相同的, 所以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 A 的互不相同的特征根, 因而 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 都是 A 的最小多项式的根, 因此可设 A 的最小多项式为 $g(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{k_i}\varphi(\lambda)$, 其中 $k_i\leq m_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是正整数, $\varphi(\lambda)$ 的首项系数为1, 且 $\varphi(\lambda_i)\neq0(i=1,2,\cdots,s)$。因为 $f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式, 由定理1, $f(A)=0$, 且由定理1, 可得 $g(\lambda)|f(\lambda)$, 即 $\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{k_i}\phi(\lambda)\Big|\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$。所以 $\varphi(\lambda)|\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$, 因为 $\varphi(\lambda)$ 的首项系数为 $1,k_i\leq m_i(i=1,2,\cdots,s),\varphi(\lambda_i)\neq0(i=1,2,\cdots,s)$, 所以 $\varphi(\lambda)=1$。从而 $g(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$, $k_i,m_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都是正整数, 由最小多项式定义可知, k_i 是 $1,2,\cdots,m_i(i=1,2,\cdots,s)$ 中使 $g(A)=0$ 的最小正整数。

综上所述, 用矩阵 A 的特征多项式求 A 的最小多项式的一般方法。其步骤如下:

设 A 是数域 P 上的一个 n 级矩阵, A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是互不相同的, $m_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是正整数, 且 $\sum_{i=1}^{s}m_i=n$, 则 A 的最小多项式为 $g(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{k_i}, 1\leq k_i\leq m_i(i=1,2,\cdots,s)$, 然后依次取 k_i 是 $1,2,\cdots,m_i(i=1,2,\cdots,s)$, 计算 $g(A)$, 直到找出使 $g(A)=0$ 的最小正整数 $k_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为止。

例1 设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, 求 A 的最小多项式。

解 A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-2&0&0&0\\0&\lambda-2&0&0\\0&0&\lambda-1&-1\\0&0&0&\lambda-1\end{bmatrix}=$$

$(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$。

收稿日期: 2018-06-28
作者简介: 李志秀(1982-), 女, 山西大宁人, 硕士, 副教授, 研究方向: 代数。

第 35 卷第 3 期　　晋 中 学 院 学 报　　Vol.35　No.3
2018 年 6 月　　Journal　of　Jinzhong　University　　Jun.　2018

高校各院系专任教师数量确定的数学模型

张国志

(晋中学院 数理学院, 山西 晋中 030619)

摘　要: 合理确定大学里各院系专任教师的数量既是保证教学正常运行的前提,也是实行定编的需要,还是引进人才和外聘教师时参考的依据. 本文对此问题进行了研究,利用以教学工作量的多少确定教师数量的方法确定了各院系专业课教师数量和公共课教师数量, 从而得到各院系专任教师总量.

关键词: 专业课教师数量; 公共课教师数量; 专任教师总量

中图分类号: O157.5　　文献标志码: A　　文章编号: 1673-1808(2018)03-0001-04

0　引言

合理确定大学里各院系专任教师的数量既是保证教学正常运行的前提,也是实行定编的需要,还是引进人才和外聘教师时的重要参考.

设全校有 n 个专业,各专业在校学生人数分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$,全校专任教师总数为 M,按学校整体计算的生师比,很显然是 $\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{M}$,或者说,一所大学只要学生人数确定,根据教育部规定的生师比即可确定其教师数量. 但进一步如何确定各院系的教师数量呢? 可能有人会说: 各院系的教师数量也可用上面计算生师比的方法而得. 但由于一个专业的课程一般是由专业课和公共课共同组成的,而公共课往往是由非本专业教师承担的,而且各专业的专业课和公共课比例也不尽相同,甚至会出现两种极端情形,一是有的院系纯粹不承担公共课的教学,一是有的院系仅仅承担公共课的教学(如公共外语部等),故不能用计算生师比方法去计算各院系的教师数量. 那么如何确定各院系教师的数量呢? 本文就此作一探讨.

1　计算原理与方法

计算原理: 根据教学工作量的多少确定各院系教师的数量.

计算方法:

第一步: 确定全校专任教师总数. 根据在校学生总数和教育部规定的生师比可确定全校专任教师总数,全校专任教师总数记为 M. 例如,若学生人数为 15 000 名,按生师比 20 : 1 计算,需要教师 750 名.

第二步: 根据各专业人才培养方案规定的学时数计算全校平均每个教师每年承担的教学工作量数.

设全校有 n 个专业,各专业四年总学时数分别为 $N_1, N_2, \cdots, N_n$,班级数分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$,则 $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} N_i b_i$ 为全校平均一年的工作量总和; 而 $\overline{M} = \frac{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} N_i b_i}{M}$ 为全校平均每个教师每年承担的教学工作量数.

[收稿日期] 2015-05-11

[基金项目] 山西省高校"131"领军人才工程项目: "Hamilton 图及相关问题的研究"(239).

[作者简介] 张国志(1961-),男,山西平遥人,晋中学院数理学院,教授,研究方向: 图论及其应用.