数学建模研究性论文

第 41 卷 第 5 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 41 No. 5
2018 年 9 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Sep., 2018

一类具有自由边界的反应扩散对流的SI传染病模型*

梁建秀

(山西晋中学院数理学院，晋中 030619)

(山西大学疾病防控的数字技术与大数据分析山西省重点实验室，太原 030006)

(E-mail: 2668186889@qq.com)

摘要　本文研究了一类具有双自由边界的 SI 模型，引入两个自由边界来描述疾病传播的边缘．首先，讨论了该问题全局解的存在性和唯一性．其次，分别定义了相应于该模型下的常微分方程系统和在固定域上的系统的基本再生数 R_0 与 R_0^D．进而，定义了该模型在自由边界条件下的基本再生数 R_0^F，并获得了疾病消退或蔓延的充分条件．结果表明：当 $R_0<1$ 时，无论染病者的初始值多少，疾病都不会蔓延到整个区域．而当 $R_0^F<1$ 且染病者的初始值 $\|I_0(x)\|_{C([-h_0,h_0])}$ 充分小时，疾病将消退；当 $R_0^F>1$ 时，疾病将蔓延．

关键词　SI 模型；扩散；对流；自由边界；蔓延与消退

MR(2000) 主题分类　35R35; 35K60; 35B60

中图分类

1　引言

传染病模型的传播是了解传染病发病机制的基础．众所周知，早在 1927 年，Kermack 与 Mckendrick 构建数学模型研究流行病学．从那时起，大量的数学模型被用于分析各种各样的传染病问题．对于常微分方程组描述的经典的传染病仓室模型看 [1,2] 等．近年来，已经有许多数学模型研究了空间扩散对传染性疾病的持久性和灭绝性影响如 [3–8] 等，表明疾病总是从一个地方蔓延到一个更大的区域，在更大范围的空间传播．然而，它们仍然没有反映现实．为了描述疾病传播区域的变化过程，[9] 讨论了自由边界问题，特别是著名的 Stefan 条件已被用来描述在边界的相互作用和扩散过程，例如，它被用来描述冰的熔化 [10]，图像处理 [11]，伤口愈合 [12] 以及入侵物种的传播 [13–19] 等．最近，

本文 2017 年 11 月 6 日收到．2018 年 8 月 2 日收到修改稿．

* 国家自然科学基金 (61573016)，晋中学院优秀数学建模团队资助项目．

Liang et al. *Boundary Value Problems* (2016) 2016:131
DOI 10.1186/s13661-016-0641-4

Boundary Value Problems
a SpringerOpen Journal

RESEARCH
Open Access

A reaction-diffusion-advection logistic model with a free boundary in heterogeneous environment

Jianxiu Liang[1], Lili Liu[2] and Zhen Jin[2*]

*Correspondence: jinzhn@263.net
[2]Complex Systems Research Center, Shanxi University, Taiyuan, Shan'xi 030006, China
Full list of author information is available at the end of the article

Abstract

The aim of this paper is to investigate the dynamics of the solution for a class of reaction-diffusion-advection logistic model with a free boundary in heterogeneous environment. The species undergoes diffusion and advection in a one dimensional heterogeneous environment, and it invades the environment with a spreading front evolving as the free boundary. To understand the effects of the advection rate α and the expansion capacity μ on the dynamics of this model, we derive a spreading-vanishing dichotomy and obtain the sharp criterion for the spreading and vanishing by choosing α and μ as variable parameters. That is, the invasion species can unconditionally survive for a slow advection rate, while, for a fast advection rate, whether it can survive or not depends on the expansion capacity and initial values of the invasion species.

Keywords: reaction-diffusion-advection; free boundary condition; heterogeneous environment; spreading; vanishing

1 Introduction

Due to the serious threat of invasive species to bio-diversity conservation and the global economy, mathematical modeling has become an important tool in analyzing the prediction and prevention of biological invasions [1, 2]. Recently, a great deal of attention has been paid to developing more realistic mathematical models for the invasion dynamics. There have been a number of works on modeling the invasion of a species described by a reaction-diffusion system; see [3–7] and the references cited therein for further details.

There is growing interest in modeling and understanding spatial species dynamics in advection environments, *i.e.*, environments where individuals are exposed to unidirectional flow or biased dispersal [8]. For example, water flow imposes directional bias (advection) buoyancy and turbulence leads to unbiased movement (diffusion) [9]. The West Nile virus appeared for the first time in New York city in the summer of 1999. In the second year the wave front traveled 187 km to the North and 1,100 km to the South [10]. It should be noticed that the term 'advection' was used in a series of works, see [3, 11–15], to show movement toward a higher quality habitat. In [16], Lou and Lutscher established the existence

Springer

文章编号:0253-2328(2016)02-0161-04

具有时滞及反馈控制的两种群合作系统的持续生存性与全局稳定性分析

梁建秀
(晋中学院 数学学院,山西 晋中 030600)

摘 要:在经典的两种群合作系统的基础上,利用微分不等式及比较原理讨论了具有时滞效应及反馈控制的系统持续生存的条件,通过构造 Lyapunov 函数,证明了当系统的系数满足一定条件时系统存在的唯一正平衡点是全局稳定的.

关键词:合作系统;时滞;反馈控制;持续生存;全局稳定性
分类号:(中图) O175.14 (2000 MR)34K15;34C25;92D25 **文献标志码**:A

在种群生态学研究中,合作系统的动力学行为受到诸多学者的广泛关注,对于经典的两种群合作系统及具有时滞效应的两种群或多种群合作系统的解的稳定性研究已有了一些较完整的结果[1-5].然而在很多情况下,一个生态系统很难避免外界干扰的影响,如反馈控制变量对系统的动力学的影响.文献[6]提出并研究了两种群竞争反馈控制模型,结果表明反馈控制变量能较好地刻画人类的捕获等干扰因素.文献[7]探讨了更为广泛的具有无穷时滞的竞争反馈控制系统,结果表明反馈控制变量对系统的动力学行为有重要的影响.文献[8—10]提出并研究了各类具有反馈控制的合作系统,结果仅表明反馈控制变量不影响系统的持久性.文献[11]在经典的两种群合作系统具有全局稳定的正平衡点的条件下,深入研究了反馈控制变量对系统的稳定性的影响.特别地,文献[12]综合论述了各种合作系统的动力学行为发展过程以及近年来学者们在这方面所做的工作,为此方面的研究提供了很高的参考价值.值得一提的是文献[12]在文献[5]研究的基础上提出了如下尚待研究的具有时滞及反馈控制的合作系统:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1(t)[a_1 - b_1x_1(t) + \\ \quad c_1x_2(t-\tau_1) - d_1u_1(t-\tau_2)], \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_2(t)[a_2 - b_2x_2(t) + \\ \quad c_2x_1(t-\tau_3) - d_2u_2(t-\tau_4)], \\ \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = -e_1u_1(t) + f_1x_1(t-\tau_5), \\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = -e_2u_2(t) + f_2x_2(t-\tau_6), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_i,b_i,c_i,d_i,e_i,f_i(i=1,2)$ 均为正常数,$x_i(t)(i=1,2)$ 为第 i 个种群 t 时刻的密度函数,$u_i(t)(i=1,2)$ 为反馈控制变量.基于系统的生态学意义,设系统(1)满足初始条件

$$\begin{aligned} &x_i(s)=\varphi_i(s),\quad \varphi_i(0)>0, \\ &u_i(s)=\phi_i(s),\quad \phi_i(0)>0,\quad i=1,2, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\varphi_i(s),\phi_i(s)(i=1,2)$ 是 $[-\tau,0]$ 上的连续函数,$\tau=\max\{\tau_i,i=1,2,3,4,5,6\}$.

深受前人工作的启发,本文将尝试对系统(1)~(2)的持久性及稳定性进行研究.

1 定义及引理

为了便于研究,首先给出一些定义和引理(详见文献[12]).

收稿日期:2015-09-09
基金项目:山西省高等学校科技创新项目(2013156);山西省高等学校教学改革项目(J2013099)
……(电子信箱)ljx6969@163.com.

第 44 卷第 24 期
2014 年 12 月

数学的实践与认识
MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY

Vol.44, No. 24
Dec., 2014

带有时滞的非自治三种群 Lotka-volterra 混合模型的渐近性

梁建秀

(晋中学院 数学学院, 山西 晋中 030600)

摘 要: 讨论非自治的周期系数的 Lotka-volterra 三种群时滞混合模型, 种群间既有捕食关系又有竞争关系, 当系数满足一定条件时模型的持久性, 进而获得了模型正周期解存在与全局渐近稳定的充分条件, 并举例说明条件的可行性.

关键词: 一致持续生存; 正周期解; 全局渐近稳定

1 模型与概念

生物系统的持久性、周期解的存在性等的研究有着重要的意义, 一直以来在此方面的研究已有不少结果 [1-4] 等, 当不考虑时滞因素时, 文献 [1] 已得到三种群混合模型周期解的唯一存在与全局渐近稳定性. 在此基础上本文将对以下模型进行分析考虑:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)[r_1(t) - a_{11}(t)x_1(t) - a_{12}(t)x_2(t) - a_{13}(t)x_3(t) - \alpha_1(t)\int_{-\tau}^{0} k_1(s)x_1(t+s)\mathrm{d}s] \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)[r_2(t) - a_{21}(t)x_1(t) - a_{22}(t)x_2(t) - a_{23}(t)x_3(t) - \alpha_2(t)\int_{-\tau}^{0} k_2(s)x_2(t+s)\mathrm{d}s] \\ \dot{x}_3(t) = x_3(t)[-r_3(t) + a_{31}(t)x_1(t) + a_{32}(t)x_2(t) - a_{33}(t)x_3(t) - \alpha_3(t)\int_{-\tau}^{0} k_3(s)x_3(t+s)\mathrm{d}s] \end{cases} \tag{1.1}$$

式中 $x_i(t)$ 是种群 X_i 的密度函数, 其中种群 X_3 以种群 X_1 与 X_2 为食饵, 食饵种群 X_1 与 X_2 间又存在资源竞争. 对于一个连续有界函数 $f(t)$, 令 $f^L = \inf\{f(t), t \in R\}$, $f^M = \sup\{f(t), t \in R\}$. 基于生态意义, 我们对模型 (1.1) 总是假定: $x_i(t), r_i(t), a_{ij}(t), \alpha_i(t) (i = 1, 2, 3)$ 是连续的有界的 (有正的上界和正的下界) 正周期函数, 且对 $t \in [0, \infty)$ 满足:

(H1) $0 < r_i^L \le r_i(t) \le r_i^M < \infty, 0 < a_{ij}^L \le a_{ij}(t) \le a_{ij}^M < \infty, 0 < \alpha_i^L \le \alpha_i(t) \le \alpha_i^M < \infty (i = 1, 2, 3)$,

(H2) $k_i(s) (i = 1, 2, 3)$ 是定义在 $[-\tau, 0], (0 \le \tau < \infty)$ 上的非负分段连续函数, 且是标准化的, 即 $\int_{-\tau}^{0} k_i(s)\mathrm{d}s = 1$.

这里首先给出文中要用到的公式和概念:

$R_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) > 0 : x_i > 0 (i = 1, 2, 3)\}$, 若 $(x_1, x_2, x_3) \in R_+^3$, 则记 $(x_1, x_2, x_3) > 0$.

由于生态学的缘故, 我们仅在 R_+^3 内考虑模型 (1.1).

把 (x_1, x_2, x_3) 的范数定义为 $\|(x_1, x_2, x_3)\| = \max\{x_1, x_2, x_3\}$, 那么就定义了初始函数空间: $C^+ = C([-\tau, 0]; R_+^3)$ 表示所有具有范数 $\|\Phi\| = \sup_{S\in[-\tau,0]} |\Phi(S)| (\Phi \in C^+)$ 的连续函数构成的巴拿赫空间. 对于任意给定 $\Phi \in C^+$, 易知存在 $\alpha \in (0, +\infty)$, 在区间 $[-\tau, \alpha]$ 上, 模型

收稿日期: 2014-05-20
资助项目: 山西省高等学校科技创新项目 [2013156]; 山西省高等学校教学改革项目 [J2013099]

生 物 数 学 学 报 2013，28(3)：505-508

Journal of Biomathematics

非自治的带有连续时滞的 Lotka-volterra 竞争模型分析

梁建秀

(山西省晋中学院 数学学院，山西 晋中 030600)

摘　要： 考虑非自治的具有周期系数的 Lotka-volterra 两种群时滞模型，首先在讨论其一致持续生存的条件时，避免了构造持续生存函数的困难，利用微分不等式的方法证明了连续时滞不影响种群的一致持续生存，通过构造李亚普诺夫泛函获得了正周期解存在与全局渐近稳定的充分条件．

关键词： 一致持续生存；时滞；正周期解；全局渐近稳定

中图分类号： O175.26　**MR 分类号：** 37K57；35B35；92D25　**文献标识码：** A

文章编号： 1001-9626(2013)03-0505-04

1 模型与概念

种群生态学的一个重要问题是研究竞争种群共存的条件．许多学者一直以来在此方面进行研究 [1-6] 等，在此基础上本文将对以下模型进行分析考虑：

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=x(t)\left[r_1(t)-a_1(t)x(t)-b_1y(t)-\alpha(t)\int_{-\tau}^{0}k_1(s)x(t+s)ds\right], \\ \dot{y}(t)=y(t)\left[r_2(t)-a_2x(t)-b_2(t)y(t)-\beta(t)\int_{-\tau}^{0}k_2(s)y(t+s)ds\right], \end{cases} \tag{1}$$

式中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是种群 XA：的密度函数，对于一个连续有界函数 $f(t)$，令

$$f^L=\inf\{f(t),t\in R\},\qquad f^M=\sup\{f(t),t\in R\}$$

根据生态意义，我们对模型 (1) 总是假定：$x(t)$，$y(t)$，$r_i(t)$，$a_i(t)$，$b_i(t)$，$\alpha(t)$，$\beta(t)$ $(i=1,2)$ 是连续的有界的 (有正的上界和正的下界) 正周期函数，且对 $t\in[0,\infty)$ 满足：

(H1) $0<r_i^L\le r_i(t)\le r_i^M<\infty$，$0<a_i^L\le a_i(t)\le a_i^M<\infty$，$0<b_i^L\le b_i(t)\le b_i^M<\infty$，
$0<\alpha^L\le a(t)\le\alpha^M<\infty$；$0<\beta^L\le\beta(t)\le\beta^M<\infty$；

(H2) $k_i(s)$ $(i=1,2)$ 是定义在 $[-\tau,0]$，$(0\le\tau<\infty)$ 上的非负分段连续函数，且是标准化的，即

收稿日期： 2012-05-18

基金项目： 山西省教育厅高校研究与开发项目 (200811053)

作者简介： 梁建秀 (1970-)，女，山西盂县人，副教授，硕士．　E-mail:Ljx6969@163.com

第 17 卷 第 1 期　　太原师范学院学报（自然科学版）　　Vol. 17 No. 1
2018 年 3 月　　JOURNAL OF TAIYUAN NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition)　　Mar. 2018

一类网络上的 SIS 传染病模型*

王　惟，张国志
（晋中学院 数理学院，山西 晋中 030619）

〔摘要〕　文章研究了网络上 SIS 传染病模型，考虑了交叉感染、迁移扩散以及迁移时滞对传染病传播的影响。结合图论中强连通图的相关知识构造出恰当的 Lyapunov 泛函，证明系统的一致有界性，同时利用强次线性求出了阈值 s，给出无病平衡点和地方病平衡的全局渐近稳定的条件。

〔关键词〕　网络传染病模型；Lyapunov 泛函；Lasalle 不变集原理；全局渐近稳定
〔文章编号〕　1672-2027(2018)01-0007-04　〔中图分类号〕　O175.13　〔文献标识码〕　A

0　引言

随着社会发展，不同地区成员交流越来越多，讨论传染病模型时，有必要考虑不同地区成员之间疾病传染的情况，也就是说需要将模型结合网络进行研究。作者 Michael Y. Li 等将图论知识应用到高维网络结构上的传染病模型，主要研究各个地区之间的成员单独通过交叉感染所形成的网络[1-4]。本文将讨论双重耦合网络上的 SIS 模型：

$$\begin{cases} S'_i = b_i - \mu_i S_i - \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} S_i I_j + \gamma_i I_i + \sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij} e^{-\mu_{ij}\tau_{ij}} S_j(t-\tau_{ij}); \\ I'_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} S_i I_j - (\mu_i + \gamma_i) I_i + \sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij} e^{-\mu_{ij}\tau_{ij}} I_j(t-\tau_{ij}). \end{cases} \quad i,j = 1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

其中：S_i 表示第 i 个斑块里易感者数量，I_i 代表 i 斑块染病者的数量；$b_i(b_i > 0)$ 表示单位时间外界输入到斑块 i 的成员总数；第 i 斑块内自然死亡率用符号 $\mu_i(\mu_i > 0)$；交叉感染的发生率为 $\beta_{ij} S_i I_j$，$(\beta_{ij} \geqslant 0)$；$\gamma_i(\gamma_i > 0)$ 代表第 i 斑块内染病者的恢复率系数；$d_{ij}(i \neq j)$ 表示斑块 j 的成员向斑块 i 的迁移率系数，则 $i \neq j$ 时 $d_{ij} \geqslant 0$，而 d_{ii} 表示从斑块 i 中迁出率系数，则 $d_{ii} \leqslant 0$ 且 $-d_{ii} = \sum\limits_{j \neq i} d_{ji}$，称矩阵 $D = (d_{ij})_{n\times n}$ 为迁移矩阵；$\mu_{ij}(\mu_{ij} \geqslant 0)$ 表示从第 j 个斑块到第 i 个斑块迁移途中的死亡率，假定 $\mu_{ii} = 0$，τ_{ij} 是从斑块 j 到斑块 i 所需要的时间，假定 $\tau_{ii} = 0$。

系统(1)的初值条件是 $\Phi(\varphi,\psi) \in C_+^{2n} = C([-\tau,0],\mathbb{R}_+^{2n})$ 且 $\tau = \max\{\tau_{ij}: i,j = 1,2,\cdots,n\}$。那么，无论初值 $\Phi \in C_+^{2n}$ 怎么选取，系统(1)都会存在非负解，而且是唯一的[5]。

1　平衡点的稳定性

1.1　有界性

记 $N_i = S_i + I_i$，$i = 1,2,\cdots,n$，则(1)可改写成下面形式：

$$N_i{}' = b_i - (\mu_i - d_{ii}) N_i + \sum_{j \neq i} d_{ij} \delta_{ij} N_j(t - \tau_{ij}). \tag{2}$$

其中为了方便，这里记 $\delta_{ij} = e^{-\mu_{ij}\tau_{ij}}$。接下来需要考虑系统(2)的平衡点情况。

引理 1　系统(2)在 $C([-\tau,0],\mathbb{R}_+^n)$ 上存在唯一的正平衡点。

证明　首先我们知道 (2)的平衡点为下面方程(3)的解：

$$b_i - (\mu_i - d_{ii}) N_i + \sum_{j \neq i} d_{ij} \delta_{ij} N_j = 0. \tag{3}$$

* 收稿日期：2018-01-05
作者简介：王　惟(1987-)，女，河南周口人，硕士，晋中学院数理学院助教，主要从事生物数学及网络算法研究。