概率论课程教案

二〇二三年五月

章节（单元）教案

<table>
<tr><th>要　素</th><th colspan="4">内　容</th></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第一章　　随机事件与概率</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>1.1 随机事件及其运算（1）</td><td>时间</td><td colspan="2">2021 年 8 月 31 日 7、8 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">了解概率论的简史；了解随机现象、确定性现象、随机试验的随机事件等概念；会求随机现象的样本点、样本空间；掌握随机事件间的关系。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">由概率论简史的介绍，培养学生抗挫折的能力，并且对学生进行爱国主义教育，增强学生的历史使命感。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">教学重点：写随机试验的样本点、样本空间，理解随机事件的概念及随机事件间的关系。
教学难点：写随机试验的样本空间。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">1. 了解概率论的简史；
2. 会写随机试验的样本点、样本空间；
3. 会判断随机事件间的关系。
4. 对学生进行爱国主义教育，增强学生的历史使命感。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、课堂讨论、课堂练习等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">课堂讲授、课堂讨论、课堂练习，启发式与提问式相结合等.</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">习题 1-1　第 1、2 题。</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1]陈希孺.概率论与数理统计.北京:科学出版社.2002.
[2]李贤平.概率论基础.3 版.北京:高等教育出版社.2010.
[3] 盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计.北京:高等教育出版.2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>

一、导入

概率论被称为“赌博起家”的理论。

概率论产生于十七世纪中叶，是一门比较古老的数学学科，有趣的是：尽管任何一门的数学分支的产生与发展都不外乎是生产、科学或数学自身发展的推动，然而概率论的产生，却起始于对赌博的研究，当时两个赌徒约定赌若干局，并且谁先赢 c 局便是赢家，若一个赌徒赢 a 局(a<c)，另一赌徒赢 b 局(b<c)时终止赌博，问应当如何分赌本？最初正是一个赌徒将问题求教于巴斯葛，促使巴斯葛同费尔玛讨论这个问题，从而他们共同建立了概率论的第一基本概念——数学期望。

1657 年惠更斯也给出了一个与他们类似的解法。

在他们之后，对于研究这种随机（或称偶然）现象规律的概率论做出了贡献的是伯努利家族的几位成员，雅科布给出了赌徒输光问题的详尽解法，并证明了被称为“大数定律”的一个定理（伯努利定理）这是研究偶然事件的古典概率论中极其重要的结果，它表明在大量观察中，事件的频率与概率是极其接近的，历史上第一个发表有关概率论论文的人是伯努利，他于 1713 年发表了一篇关于极限定理的论文，概率论产生后的很长一段时间内都是将古典概型作为概率来研究的，直到 1812 年拉普拉斯在他的著作《分析概率论》中给出概率明确的定义，并且还建立了观察误差理论和最小二乘法估计法，从这时开始对概率的研究，实现了从古典概率论向近代概率论的转变。

概率论在二十世纪再度迅速发展起来，则是由于科学技术发展迫切地需要研究有关一个或多个连续变化着的参变量的随机变数理论即随机过程论，1906 年俄国数学家马尔可夫（1856-1922）提出了所谓“马尔可夫链”的数学模型对发展这一理论做出贡献的还有柯尔莫哥洛夫（俄国）、费勒（美国）；1934 年俄国数学家辛钦又提出了一种在时间中均匀进行着的平稳过程的理论。随机过程理论

</td>
</tr>
</table>

教学流程	在科学技术有着重要的应用，开始建立了马尔可夫过程与随机微分方程之间的联系。 1960年，卡尔门（1930—英国）建立了数字滤波论，进一步发展了随机过程在制导系统中的应用。概率论的公理化体系是柯尔莫哥洛夫1933年在集合论与测度论的基础上建立起来的，从而使概率论有了严格的理论基础。 我国的概率论研究起步较晚，从1957年开始，先驱者是许宝马录先生。1957年暑期许老师在北大举办了一个概率统计的讲习班，从此，我国对概率统计的研究有了较大的发展，现在概率与数理统计是数学系各专业的必修课之一，也是工科，经济类学科学生的公共课，许多高校都成立了统计学（特别是财经类高校）。今年来，我国科学家对概率统计也取得了较大的成果。 **（通过对概率论历史的介绍，让学生了解事物发展的曲折性，培养学生戒骄戒躁的性格，并且对学生进行进行爱国主义教育，增强学生的历史使命感。）** **二、讲解** **§1.1　随机事件（1）** **一、随机试验** **1. 确定性现象**:必然发生或必然不发生的现象。 在正常的大气压下，将纯净水加热到100℃时必然沸腾,向上抛一石子必然下落，异性电荷相互吸引，同性电荷相互排斥等 **2. 随机现象**:在一定条件下我们事先无法准确预知其结果的现象,称为随机现象. 掷一颗骰子，可能出现1，2，3，4，5，6点, 抛掷一枚均匀的硬币，会出现正面向上、反面向上两种不同的结果. **3. 随机现象的特点**：人们通过长期实践并深入研究之后，发现这类

教学流程	现象在大量重复试验或观察下，它的结果却呈现出某种统计规律性. 概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科. **4. 随机试验** 为了对随机现象的统计规律性进行研究，就需要对随机现象进行重复观察，我们把对随机现象的观察称为**随机试验**，并简称为**试验**，记为E. **5. 随机试验具有下列特点：** 1. **可重复性**：试验可以在相同的条件下重复进行； 2. **可观察性**：试验结果可观察，所有可能的结果是明确的； 3. **随机性（不确定性）**：每次试验出现的结果事先不能准确预知. 但可以肯定会出现所有可能结果中的一个. **二、随机事件** **1. 样本点**：随机试验中的每一个可能出现的试验结果称为这个试验的一个 样本点，记作ω. **2 样本空间**：全体样本点组成的集合称为这个随机试验的样本空间，记为Ω.（或S）. 即$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}$ **例1**：E_1：投掷一枚硬币，观察正面H，反面T出现的情况， 则样本空间为$\Omega_1=\{H,T\}$. E_2：将一枚硬币连抛两次，观察正面H，反面T出现的情况， 则样本空间为$\Omega_2=\{HH,HT,TH,TT\}$. E_3：将一枚硬币连抛两次，观察正面H出现的次数， 则样本空间为$\Omega_3=\{0,1,2\}$. E_4：记录某电话台在一分钟内接到的呼叫次数， 则样本空间为$\Omega_4=\{0,1,2,\cdots\}$. E_5：已知某物体长度在10与20之间，测量其长度， 则样本空间为$\Omega_5=\{l \mid 10\le l\le 20\}$.

教学流程

E_6：在一大批灯泡中任取一只，测试其使用寿命，

则样本空间为$\Omega_6=\{t|t\geq 0\}$.

注：：1)在E_4 中，虽然一分钟内接到电话的呼叫次数是有限的，不会非常大，但一般说来，人们从理论上很难定出一个次数的上限，为了方便，视上限为∞，这种处理方法在理论研究中经常被采用.

2)样本空间的元素是由试验的目的所确定的，如E_2和E_3中同是将一枚硬币连抛两次，由于试验的目的不一样，其样本空间也不一样.

3. 随机事件：我们称试验E的样本空间Ω的子集为E的随机事件，简称事件，在随机试验中，可能出现也可能不出现，而在大量重复试验中具有某种规律性. 一般用$A,B,C,,\cdots$等大写字母表示事件. 设A为一个事件，当且仅当试验中出现的样本点$\omega\in A$时，称事件A在该次试验中发生.

如：在抛掷一枚均匀硬币的试验中，“正面向上”是一 个随机事件，可用A=｛正面向上｝表示. 掷骰子，“出现偶数点”是一个随机事件，试验结果为2，4或6点， 可用B=｛2，4，6｝表示.

注：要判断一个事件是否在一次试验中发生，只有当该次试验有了结果以后才能知道.

1)基本事件 ：仅含一个样本点的随机事件称为基本事件.

如:抛掷一颗骰子，观察出现的点数，那么“出现1点”、“出现2点”，. . . ，“出现6 点”为该试验的基本事件.

2)必然事件：样本空间Ω本身也是Ω的子集，它包含Ω的所有样本点，在每次试验中Ω必然发生，称为必然事件. 即必然发生的事件.

如：“抛掷一颗骰子，出现的点数不超过6”为必然事件.

3)不可能事件：空集Φ也是Ω的子集，它不包含任何样本点，在每次试验中都不可能发生，称为不可能事件. 不可能发生的事件是不包含任何样本点的.

如：“掷一颗骰子，出现的点数大于6”是不可能事件.

教学流程	**三、事件间的关系** **研究原因：**希望通过对简单事件的了解掌握较复杂的事件 **研究规则：**事件间的关系和运算应该按照集合之间的关系和运算来规定 事件间的关系及运算与集合的关系及运算是一致的. **1、子事件、包含关系** $A \subset B$ 事件A是事件B的子事件 含义：事件A发生必然导致事件B发生， **2、相等事件** $A = B$:若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，且若事件 B 发生必然导致事件 A 发生， 即 $B \supset A$且 $A \supset B$ $\Leftrightarrow$ **A=B** **注：事件 A 与事件 B 含有相同的样本点.** **例如：**在投掷一颗骰子的试验中，事件“出现偶数点”与事件“出现 2，4 或 6 点”是相等事件。
教学后记	学生听课比较认真，讲课比较顺当，按照计划顺利地完成了本次课程。

章节（单元）教案

<table>
<tr><th>要　素</th><th colspan="4">内　容</th></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第一章　　随机事件与概率</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>1.1 随机事件及其运算（2）</td><td>时间</td><td colspan="2">2021 年 9 月 1 日 7、8 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">掌握随件事件间的运算法则，会把一个随机现象表示成随机事件或随机事件的运算。
理解事件域的概念，掌握常见的事件域。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">在讲完对立事件的定义后,对学生进行辩证主义教育,让学生明白鱼与熊掌不可兼得,有所得必有所舍.必须树立一个远大的目标,向着目标前进.不能图一时之快,而忘记自己的初心.</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">教学重点：随机事件间的运算。
教学难点：事件域的概念。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">1.掌握随件事件间的运算法则；
2.会把一个随机现象表示成随机事件或随机事件的运算；
3.理解事件域的概念，掌握常见的事件域。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、课堂讨论、课堂练习，启发式与提问式相结合等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">传统板书与多媒体课件辅助教学相结合.</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">习题 1-1　第 3、9、10 题。</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1]陈希孺.概率论与数理统计.北京:科学出版社.2002.
[2]李贤平.概率论基础.3 版.北京:高等教育出版社.2010.
[3] 盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计.北京:高等教育出版.2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教
学
流
程</td>
<td>

一、导入

复习上一节课的内容

二、讲解

（一）、随机变量的运算

1、和事件或并事件

$A \bigcup B = \{ x \mid x \in A或x \in B \}$，事件$A \bigcup B$是事件$A$和事件$B$的和事件

2、积事件或交事件

$A \bigcap B = \{x | x \in A且x \in B\}$，事件$A \bigcap B$是事件$A$与事件$B$的积事件

称$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$为n个事件A_1，$A_2,\cdots$，A_n的积事件；

称$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$为可列个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的积事件.

3、事件的差

$A - B = \{x \mid x \in A且x \notin B\}$

事件$A-B$称为事件A与事件B的差事件

事件$A-B$发生$\Leftrightarrow$事件A发生而事件B不发生.

注： $A - B = A - AB$

例如，在例1的E_2中，若记$A = \{HH, TT\}$，$B = \{HH, HT\}$，则

$A \bigcup B = \{HH, HT, TT\}$，　$A \bigcap B = \{HH\}$ }　$A - B = \{TT\}$

4、**互斥或互不相容**

$A \bigcap B = \Phi$ 则称事件A与事件B是互不相容的，或互斥的.

$A \bigcap B = \Phi \Leftrightarrow$ 事件 A 和随机 B 不能同时发生.

注： 任一个随机试验E的基本事件都是两两互不相容的.

推广：设事件 A_1，$A_2,\cdots$，A_n 满足 $A_i A_j = \Phi \ (i, j = 1, 2, \cdots, n, i \neq j)$ 称事

</td>
</tr>
</table>

教学流程	件 A_1，A_2,⋯，A_n 是两两互不相容的. **5、对立事件或互逆事件** 若事件 A 和事件 B 中有且仅有一个发生，即 $A\bigcup B=\Omega, AB=\Phi$ 则事件 A 和事件 B 为互逆事件或对立事件。记 A 的对立事件为 $\overline{A}$. **注**:互逆事件必为互斥事件，反之，互斥事件未必为互逆事件. （对学生进行辩证主义教育，鱼与熊掌不可兼得，有所得必有所舍. 必须树立一个远大的目标，向着目标前进. 不能图一时之快，而忘记自己的初心. 让学生能在逆境时斗志昂扬，在顺境时保持清醒，不至于迷失自己.） 事件的关系与运算可用图来直观的表示. **注**：事件的运算满足如下基本关系. ① $A\bigcap\overline{A}=\Phi$ $A\bigcup\overline{A}=\Omega$，$\overline{A}=\Omega-A$ ② 若A $\subset$ B，则A ∪ B＝B，A ∩ B＝A. ③ A－B＝A ∩ $\overline{B}$＝A－A ∩ B，A ∪ B＝A ∪（B－A）. 6、**完备事件组**:设 $A_1, A_2, \cdots, A_n\cdots$ 是有限或可列个事件，若其满足 ① $A_i\bigcap A_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots;$ ② $A_1\cup A_2\bigcup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\Omega$， 则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是样本空间的一个完备事件组或一个划分. **注**: A 与 $\overline{A}$ 构成一个完备事件组. **（二）、随机事件的运算规律** 幂等律：$A\bigcup A=A$，$A\bigcap A=A$ 交换律：$A\bigcup B=B\bigcup A$，$A\bigcap B=B\bigcap A$ 结合律：

教学流程

$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$　　$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

分配律:

$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

德摩根 De Morgan 定律: $\overline{A\cup B} = \overline{A}\overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A}\cup\overline{B}$

例1 一名射手连续向某个目标射击三次，事件 A_i 表示该射手第 i 次射击时击中目标（$i = 1,2,3$），试用 A_1, A_2, A_3 表示下列各事件.

（1）前两次射击中至少有一次击中目标;

（2）第一次击中目标而第二次未击中目标;

（3）三次射击中，只有第三次未击中目标;

（4）三次射击中，恰好有一次击中目标;

（5）三次射击中，至少有一次未击中目标;

（6）三次射击都未击中目标;

（7）三次射击中，至少两次击中目标;

（8）三次射击中，至多一次击中目标.

解: 分别用 $D_i, (i = 1,2,\cdots,8)$ 表示（1），（2），…，（8）中所给出的事件.

（1） $D_1 = A_1\cup A_2$.

（2） $D_2 = A_1\overline{A}_2$ 或 $D_2 = A_1 - A_2$

（3） $D_3 = A_1A_2\overline{A}_3$

（4） $D_4 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

（4） $D_5 = \overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$ 或 $\overline{A_1A_2A_3}$

（6） $D_6 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$

（7） $D_7 = A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3$

教学流程

(8) $D_8 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$

例 2 甲，乙，丙三人各射一次靶，记 $A=$“甲中靶” $B=$“乙中靶” $C=$“丙中靶” 则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件：

(1) “甲未中靶”：$\overline{A}$;

(2) “甲中靶而乙未中靶”：$A\overline{B}$;

(3) “三人中只有丙未中靶”：$AB\overline{C}$;

(4) “三人中恰好有一人中靶”：$A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$;

(5)“ 三人中至少有一人中靶”：$A \cup B \cup C$;

(6)“三人中至少有一人未中靶”：$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$;或$\overline{ABC}$;

(7)“三人中恰有两人中靶”：$AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$;

(8)“三人中至少两人中靶”：$AB \cup AC \cup BC$;

(9)“三人均未中靶”：$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(10)“三人中至多一人中靶”：$A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(11)“三人中至多两人中靶”：$\overline{ABC}$;或$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$;

注：用其他事件的运算来表示一个事件，方法往往不惟一，如上例中的(6)和(11)实际上是同一事件，读者应学会用不同方法表达同一事件，特别在解决具体问题时，往往要根据需要选择一种恰当的表示方法.

例3 如图所示电路中，A＝“灯亮”，B_1, B_2, B_3 分别表示“开关Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ闭合” $B_1B_2 \subset A$，$B_1B_3 \subset A$，$B_1B_2 \cup B_1B_3 = A$.

这是因为，如果 B_1B_2 发生，即开关Ⅰ，Ⅱ同时闭合，则整个电路接通，于是灯亮，即A发生，所以 $B_1B_2 \subset A$，同理 $B_1B_3 \subset A$.

如果 $B_1B_2 \cup B_1B_3$ 发生，即 B_1B_2 或 B_1B_3 中至少一个发生，则整

教学流程

个电路接通，于是灯亮，即A发生，所以$B_1B_2 \cup B_1B_3 \subset A$反之，如果A发生，即灯亮，则$B_1B_2$ 或B_1B_3中至少有一个发生，所以

$B_1B_2 \cup B_1B_3 \supset A$　由事件相等的定义，$B_1B_2 \cup B_1B_3 = A$.

（三）、事件域

事件是Ω的子集，如果事件的这些子集归在一起，则得到一个类，称作事件域，记作F。即$F = \{A : A \subset \Omega, A\text{为事件}\}$.

∵　Ω, Φ为事件

∴　$\Omega \in F, \Phi \in F$.

因为我们讨论了事件间的运算“$\cup$”“$\cap$”和“-”, 如果A,B都是事件，即$A, \mathrm{B} \in \mathrm{F}$，自然要求$A \cup \mathrm{B}$，$A \cap \mathrm{B}$，$A - \mathrm{B}$也是事件，因此，若$A \in \mathrm{F}, \mathrm{B} \in \mathrm{F}$ 就要求$A \cup \mathrm{B} \in \mathrm{F}$，$A \cap \mathrm{B} \in \mathrm{F}$，$A - \mathrm{B} \in \mathrm{F}$.

用集合论的语言来说，就是事件域F关于运算“$\cup$”,“$\cap$”和“-”是封闭的.

事件域　应该满足如下要求：

1）$\Omega \in F$；

2）若$A \in F$，则$\overline{A} \in F$；

3）若 $A \in F, i = 1, 2, \cdots, n$，则$\bigcup_{i=1} A_i \in F$.

在集合论中，满足上述三条件的集合类称为布尔代数（σ代数）

所以事件域是一个布尔代数，对于样本空间 Ω，如果F是Ω的一切子集的全体，那么显然F是一个布尔代数。

三、课堂练习

1．设当事件A与B同时发生时C也发生，则（　C）

（A）$A \cup B$是C的子事件；　（B）$\overline{ABC}$;或$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$;

（C）AB是C的子事件；　（D）C是AB的子事件.

2．设事件A={甲种产品畅销，乙种产品滞销}，则A的对立事件为（D）.

（A）甲种产品滞销,乙种产品畅销;

教 学 流 程	(B) 甲种产品滞销; (C) 甲、乙两种产品均畅销; (D) 甲种产品滞销或者乙种产品畅销
教　学 后　记	本节课程和高中的内容比较接近，学生学习比较简单，课堂比较活跃，教学效果比较好。

章节（单元）教案

要　素	内　容		
章节名称	第一章　　随机事件与概率	教学时数	
单元内容	§1.2 概率与频率（1）	时间	2021 年 9 月 7 日第 7、8 节
教学目标	了解概率论的频率定义、主观定义；掌握概率的古典定义；掌握计算古典概率基础的排列组合等相关内容。		
思政目标	由历史上的掷硬币试验对学生进行思政教育，让学生知道真理往往不是轻而易举可以获得的,需要坚持不懈的努力。消除学生的急功近利的、浮躁的风气，使学生能平心静气地学习。		
重点难点	教学重点：概率的古典定义；排列组合等相关内容。 教学难点：排列组合等相关内容。		
教学要求	1.了解概率论的频率定义、主观定义； 2.掌握概率的古典定义； 3.掌握计算古典概率基础的排列组合等相关内容； 4.对学生进行思政教育，消除学生的急功近利的、浮躁的风气.		
教学方法	课堂讲授、课堂讨论、课堂练习等		
授课方式	传统板书与多媒体课件辅助教学相结合.		
练　习 作　业	习题 1-2　第 1、9 题。		
参　考 资　料	[1]陈希孺.概率论与数理统计.北京:科学出版社.2002. [2]李贤平.概率论基础.3 版.北京:高等教育出版社.2010. [3] 盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计.北京:高等教育出版.2008.		

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程	

一、概率与频率的概念

对于随机试验中的随机事件，在一次试验中是否发生，虽然不能预先知道，但是它们在一次试验中发生的可能性是有大小之分的。比如掷一枚均匀的硬币，那么随机事件A（正面朝上）和随机事件B（正面朝下）发生的可能性是一样的（都为1/2）。又如袋中有8个白球，2个黑球，从中任取一球。当然取到白球的可能性要大于取道黑球的可能性。一般地，对于任何一个随机事件都可以找到一个数值与之对应，该数值作为发生的可能性大小的度量。

定义 1.1:随机事件A发生的可能性大小的度量（数值），称为A发生的**概率**，记为$P(A)$。

对于一个随机试验来说，它发生可能性大小的度量是自身决定的，并且是客观存在的。概率是随机事件发生可能性大小的度量是自身的属性。一个根本问题是，对于一个给定的随机事件发生可能性大小的度量——概率，究竟有多大呢？

再来看，掷硬币的试验，做一次试验，事件A（正面朝上）是否发生是不确定的，然而这是问题的一个方面，当试验大量重复做的时候，事件A发生的次数，也称为频数，体现出一定的规律性，约占总试验次数的一半，也可写成$f_n(A)=A$发生的频率=频数/试验总次数，接近于1/2.

一般的，设随机事件A在n次试验中出现n_A次，比值$f_n(A)=n_A/n$称为事件A在这n次试验中出现的**频率**.

历史上有人做过掷硬币的试验

实验者	n	n_A	$f_n(A)$
蒲丰	4040	2048	0.5070
K.皮尔逊	12000	6019	0.5016
K.皮尔逊	24000	12012	0.5005

教学流程	（由历史上许多的比较著名的统计学家为了得到真理，不厌其烦地对一个试验重复进行。对学生进行思政教育，让学生知道真理往往不是轻而易举可以获得的，需要坚持不懈的努力，消除学生的急功近利的、浮躁的风气，使学生能平心静气地学习。） 从上表可以看，不管什么人去抛，当试验次数逐渐增多时，$f_n(A)$ 总是在 0.5 附近摆动而逐渐稳定与 0.5。从这个例子可以看出，一个随机试验的随机事件 A，在 n 次试验中出现的频率 $f_n(A)$，当试验的次数 n 逐渐增多时，它在一个常数附近摆动，而逐渐稳定与这个常数。这个常数是客观存在的，“频率稳定性”的性质，不断地为人类的实践活动所证实，它揭示了隐藏在随机现象中的规律性。 试判断“频率的极限就是概率”这句话是否正确？即： $$\lim_{x\to\infty}\frac{n_A}{n}=P(A)$$ 吗？ 不正确　由 $\varepsilon-N$ 定义，若 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n_A}{n}=P(A)$ 成立， 则　$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\ \forall n>N\Rightarrow\left\|\frac{n_A}{n}-P(A)\right\|<\varepsilon$. 而频率具有随机性，$\forall n>N$，并不能保证$\left\|\frac{n_A}{n}-P(A)\right\|<\varepsilon$ 恒成立.例如，当 $n_A=n$ 时，取 $\varepsilon<1-P(A)$，上述不等式就不成立。 因此，在概率论与数理统计中不能沿用数学分析中的一般极限定义了。 随机事件 A 在一次随机试验中是否会发生，事先不能确定，但希望知道它发生可能性的大小．这里先引入频率的概念，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数字度量———概率． **一、频率及其性质** 1、**定义1** 在相同条件下重复进行了 n 次试验，如果事件 A 在这 n 次

教学流程	试验中发生了n_A次，则称比值n_A/n为事件A发生的频率，记作$f_n(A)$ 它具有下述性质：1°非负性　$0 \le f_n(A) \le 1$　； 2°规范性　$f_n(S)=1;$ 3°有限可加性　若$A_1, A_2, \cdots, A_k$是两两互不相容事件,则 频率$f_n(A)$的大小表示了在n次试验中事件A发生的频繁程度．频率大，事件A发生就频繁，在一次试验中A发生的可能性就大，反之亦然．因而直观的想法是用频率来描述A在一次试验中发生的可能性的大小． 2、频率的稳定性 随机事件A在相同条件下重复多次时，事件A发A生的频率在一个固定的数值p附近摆动,随机试验次数的增加更加明显,事件的频率稳定在数值p，说明了数值p可以用来刻划事件A发生可能性的大小，可以规定为事件A的概率. **二、概率的统计定义** **定义2**　对任意事件A，在相同的条件下重复进行n次试验，事件A发生k次，从而事件A发生的频率$\frac{k}{n}$，随着试验次数n的增大而稳定地在某个常数p附近摆动,那么称p为事件A的概率$P(A)=p$. 上述定义称为随机事件概率的统计定义．在实际应用时，往往可用试验次数足够大时的频率来估计概率的大小，且随着试验次数的增加，估计的精度会越来越高．在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，然后求得事件发生的频率，用以表征事件发生的概率．为此给出概率的严格的公理化定义． **三、概率的公理化定义** **定义3** 设E是随机试验，Ω是它的样本空间，对E的每一个事件A赋

教学流程	予一个实数，记为$P(A)$，若$P(A)$满足下列三个条件： （1）非负性　对每一个事件A，有$P(A)\geq 0$； （2）规范性　对于必然事件Ω，有$P(\Omega)=1$； （3）可列可加性　设$A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的事件，有 $$f(A_1\cup A_2\cup\cdots)=f(A_1)+f(A_2)+\cdots$$ 则称$P(A)$为事件A发生的概率. **一、古典概型** 我们称具有下列两个特征的随机试验模型为古典概型. （1）随机试验只有有限个可能的结果； （2）每一个结果发生的可能性大小相同．古典概型又称为等可能概型. 设试验E是古典概型，样本空间为$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，则基本事件$\{\omega_1\}$，$\{\omega_2\}$，…，$\{\omega_n\}$两两互不相容，$\Omega=\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\}$ 由于$P(\Omega)=1$及$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$，因此 $$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\frac{1}{n}$$ 若事件A包含k个基本事件，即$A=\{\omega_{i1}\}\cup\{\omega_{i2}\}\cup\cdots\cup\{\omega_{ik}\}$ 其中$i_1,i_2,\cdots i_k$是$1,2,\cdots,n$中某k个不同的数，则有 $$P(A)=P(\omega_{i1})+P(\omega_{i2})+\cdots P(\omega_{ik})=\frac{k}{n}$$ 即$P(A)=\dfrac{A\text{中包含基本事件数}}{\text{S中基本事件总数}}=\dfrac{k}{n}$ **二、古典概率的基础** 1 基本计数原理： **(1) 加法原理**　设完成一件事有m种方式,其中第一种方式有n_1种方法，第二种方式有n_2种方法，……,第m种方式有n_m种方法，

<table>
<tr><td>教学流程</td><td>无论通过哪种方法都可以完成这件事,则完成这件事的方法总数为
$n_1+n_2+\cdots+n_m$.

(2)乘法原理 设完成一件事有 m 个步骤,其中第一个步骤有 n_1 种方法，第二个步骤有 n_2 种方法，……，第 m 个步骤有 n_m 种方法；完成该件事必须通过每一步骤才算完成，则完成这件事的方法总数为 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_m$.

2. **排列组合方法**
（1）**排列公式**：从 n 个不同元素中任取 k 个的不同排列总数为
$$A_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}$$
（2） **组合公式**；从 n 个不同元素中任取 k 个的不同组合总数为
$$C_n^r=\frac{A_n^r}{r!}=\frac{n!}{r!\left(n-r\right)!}$$</td></tr>
<tr><td>教 学
后 记</td><td></td></tr>
</table>

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第一章　　随机事件与概率</td><td>教学时数</td><td></td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>§1.2 概率与频率（2）</td><td>时间</td><td colspan="2">2021 年 9 月 7 日第 7、8 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">会用古典概型求随机事件的概率；掌握概率的几何定义，会用几何概型求随机事件的概率；掌握常见的古典概型、几何概型。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">从古典概型到几何概型，几何概型从一维到多维是一步一步演化来的。我们做任何事情都不能急于求成，只有打好基础，才能盖成高楼大厦。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">教学重点：运用古典概型和几何概型计算随机事件的概率；
教学难点：运用古典概型计算复杂随机事件的概率。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">1.会用古典概型求随机事件的概率；
2.掌握概率的几何定义，会用几何概型求随机事件的概率；
3.掌握常见的古典概型、几何概型。
4.对学生进行思政教育，消除学生的急功近利的、浮躁的风气.</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、课堂讨论、课堂练习等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">传统板书与多媒体课件辅助教学相结合.</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">习题 1-2　第 1、9、1020、2、24 题。</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1]陈希孺.概率论与数理统计.北京:科学出版社.2002.
[2]李贤平.概率论基础.3 版.北京:高等教育出版社.2010.
[3]盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计.北京:高等教育出版.2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程	一、复习引入 1. 古典概型 我们称具有下列两个特征的随机试验模型为古典概型. （1）随机试验只有有限个可能的结果； （2）每一个结果发生的可能性大小相同．古典概型又称为等可能概型. 即 $P(A)=\dfrac{A\text{中包含基本事件数}}{\text{S中基本事件总数}}=\dfrac{k}{n}$ 2. 古典概型的例子 例 1　将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H，反面 T 出现的情况。 (1) 设事件为“恰有一次出现正面”，求 $P(A_1)$； (2) 设事件 A_2 为“第一次出现正面”，求 $P(A_2)$； (3) 设事件 A_3 为“至少有一次出现正面”，求 $P(A_3)$. 解：Ω 中包含有限个元素，且每个基本事件发生的可能性相同，属于古典概型。样本空间 $\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$，$n=8$ (1)　$A_1=\{HTT,THT,TTH\}$，$k_1=3$，$P(A_1)=\dfrac{k_1}{n}=\dfrac{3}{8}$ (2)　$A_1=\{HHH,HHT,HTH,,HTT\}$， $k_2=4$，$P(A_2)=\dfrac{k_2}{n}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$ (3) $A_3=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH\}$ 或 $\overline{A}_3=\{TTT\}$ 例2　袋中装有5只白球3只黑球，分别按下列方式抽取2只： （1）第一次取一球不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一球．这种取球方式叫做不放回抽样. （2）第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再取一球．这

教学流程

种取球方式叫做放回抽样.

（3）一次任取2只．设A＝“所取2只球均为白球”，B＝“所取2只球中一白一黑”，求$P(A),P(B)$.

解（1）不放回抽样. 第一次从8只球中抽取一只，不再放回，故第二次从7只球中抽取1只，因此基本事件总数为$A_8^2=8\times 7=56$.因为第一次有5只白球供抽取,第二次有4只白球供抽取,所以事件A中包含的基本事件数为$A_5^2=5\times 4=20$个.

所以 $$P(A)=\frac{A_5^2}{A_8^2}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}.$$

从5只白球中任取一只共有5种方法,从3只黑球中任取一只共有3种方法,第一次取得白球第二次取得黑球及第一次取得黑球第二次取得白球构成事件B，共有$A_5^1A_3^1+A_3^1A_5^1=15+15=30$种方法， 故

$$P(B)=\frac{A_5^1A_3^1+A_3^1A_5^1}{A_8^2}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}.$$

（2）放回抽样. 因为每次都是从8只球中抽取，故由乘法原理，基本事件总数的$8^2=64$,又由于两次都是从5只白球中抽取，故构成A的基本事件数为$5^2=25$，因此$P(A)=\frac{5^2}{8^2}=\frac{25}{64}$.

事件B包含的基本事件数：第一次取得白球第二次取得黑球有5×3个基本事件，第一次取得黑球第二次取得白球有3×5个基本事件，故$P(B)=\frac{5^2}{8^2}=\frac{15}{64}$.

（3）一次任取2只因为不考虑次序，将从8只球中抽取2只的可能组合作为基本事件,总数为$C_8^2=28$.事件A发生的基本事件数为从5只白球中任取2只的组合，有$C_5^2=10$个．故$P(A)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$

事件B发生的基本事件数为从5只白球中任取1只,从3只黑球中

教学流程	任取一只构成的组合，共有 $C_5^1C_3^1=15$ 个，故 $P(B)=\dfrac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}=\dfrac{15}{28}$ **例 3** 一批产品共 10 件，其中有 3 件次品，今从中随机取 4 件，问其中恰有 2 件为次品的概率是多少？ 解：设 A = {从中随机地取 4 件,恰有 2 件为次品}，10 件产品中随机地取 4 件共有 C_{10}^4 种取法，每种取法为一基本事件且每个基本事件发生是等可能的，又因在 3 件次品中取 2 件的取法有 C_3^2 种，在 7 件正品中取 2 件正品的取法有 C_7^2 种，由乘法原理，在 4 件产品中有 2 件次品，2 件正品的取法共有 C_3^2 • C_7^2 种，所以 $$P(A)=\frac{C_3^2\cdot C_7^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{10}.$$ **例4** 有 r 只球，随机放在 n 个盒子中（$r\le n$）．试求下列各事件的概率. （1）每个盒子中至多有一只球； （2）某指定的 r 个盒子中各有一只球； （3）恰有 r 个盒中各有一球. **解:** r 只球放入 n 个盒子里的方法共有 $n\cdot n\cdots n=n^r$ 种，即为基本事件总数. （1）设 A ＝“每个盒子中至多有一只球”． 因为每个盒子中至多放一只球，共有 $n(n-1)\cdots[n-(r-1)]=A_n^r$ 种不同的放法．即 A 中包含的基本事件数为 A_n^r．所以 $P(A)=\dfrac{A_n^r}{n^r}$． （2）设 B ＝“某指定的 r 个盒子中各有一只球”． 由于 r 只球在指定的 r 个盒中各放一只，共有 $r!$ 种放法，故 B 中包含的基本事件数为 $r!$. 所以 $P(B)=\dfrac{r!}{n^r}$ （3）设 C ＝“恰有 r 个盒中各有一只球”． 由于在 n 个盒中选取 r 个盒子的选法有 C_n^r 种，而对于每一种选法选

教学流程	出的r个盒，其中各放一只球的放法有$r!$种．所以C包含的基本事件数为$C_n^r\cdot r!$. 所以$P(C)=\frac{C_n^r\cdot r!}{n^r}=\frac{A_n^r}{n^r}$ 例如，假设每个人的生日在一年365天中的任一天是等可能的，即都等于$\frac{1}{365}$，那么随机选取r $(r\le 365)$个人，他们的生日各不相同的概率. 因而，r个人中至少有两人生日相同的概率为 $$p=1-\frac{A_{365}^r}{365^r}.$$ 如果$r=50$，可算出$p=0.970$，即在一个50人的班级里，“至少有两个人的生日相同”这一事件发生的概率与1差别很小. 例5 从1−100的100个整数中任取一个，试求取到的整数既不能被6整除，又不能被8整除的概率. **解**:设A＝“取到的数能被6整除”，B＝“取到的数能被8整除”，C＝“取到的数既不能被6整除，也不能被8整除”．则$C=\overline{A}\overline{B}$， $P(C)=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$ 对A，设100个整数中有x个能被6整除，则$6x\le 100$，所以$x=16$．即A中有16个基本事件，$P(A)=\frac{16}{100}$． 同理B中含有12个基本事件，则$P(B)=\frac{12}{100}$． 设既能被6整除又能被8整除即能被24整除的数为y个，则$24y\le 100$，所以$y=4$．即AB中含有4个基本事件，则$P(AB)=\frac{4}{100}$ $P(C)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=1-(\frac{16}{100}+\frac{12}{100}-\frac{4}{100})=0.76$ **3. 几何概型** 古典概型只考虑了有限等可能结果的随机试验的概率模型. 将古典概型中的有限性推广到无限性，而保留等可能性，就得到几何概型. 几何概型特点：有一个可度量的几何图形Ω，试验E看成在Ω中随

教学流程	机地投掷一点，事件 A 就是所投掷的点落在 Ω 中的可度量图形 A 中． 这里我们研究样本空间为一线段、平面区域或空间立体等的等可能随机试验的概率模型—几何概型. （从古典概型到几何概型，几何概型从一维到多维是一步一步演化来的。我们做任何事情都不能急于求成，只有打好基础，才能盖成高楼大厦。） **例** 某路公共汽车每 $5\,\text{min}$ 发出一辆车，求乘客到达站点后，等待时间不超过 $3\,\text{min}$ 的概率. 如果记此事件为 A，乘客到达站点的时刻 $t\ (0 \le t \le 5)$ 可视为向时间段 $[0,5]$ 投掷一随机点．从而向时间段内投点对应于向线段上投点. 事件 $A=\{2 \le t \le 5\}$ 表示“等待时间不超过 $3\,\text{min}$， 而样本空间 Ω＝$\Omega=\{0 \le t \le 5\}$，这里所投掷的点落在线段上任一点的可能性都一样或说具有等可能性．我们理解这种等可能性的含义，就是点落在时间段内的可能性与该线段的长度成正比，与该线段的位置无关．因此事件 A 的概率决定于线段 $[2,5]$ 与 $[0,5]$ 的长度比，即 $P(A)=\dfrac{L(A)}{L(S)}=\dfrac{3}{5}$． **几何概率的定义**：如果一个随机试验相当于从直线、平面或空间的某一区域 Ω 任取一点，而所取的点落在 Ω 中任意两个度量（长度、面积、体积）相等的子区域内的可能性是一样的，则称此试验模型为几何概型，对于任意有度量的子区域，$A \subset \Omega$，定义事件“任取一点落在区域 A 内”发生的概率为 $$P(A)=\frac{A\text{的度量}}{\Omega\text{的度量}}$$ **例 6** 甲乙二人相约定 7：00-8：00 在预定地点会面，先到的人

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>
要等候另一人 20 分钟后，方可离开，假定他们在指定的一小时内任意时刻到达. 求二人能会面的概率。

解 设甲乙二人到达预定地点的时刻分别为 x 及 y（分钟），则两人到达时间的一切可能结果对应于边长为 60 的正方形里所有点

$$A=\{\text{二人会面}\}\Leftrightarrow A=\{(x,y)\mid |x-y|<20\}$$
$$P(A)=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}$$
练习 1 某人午觉醒来，发觉表停了，他打开收音机，想听电台报时，求他等待的时间不超过 10 分钟的概率.（1/6）

2 在线段 AD 上任意取两个点 B、C，在 B、C 处折断此线段而得三折线，求此三折线能构成三角形的概率.

解：设 A＝{三折线能构成三角形}设 $AD=1$，$AB=x$，$BC=y$，$CD=1-x-y$.

则样本空间 $\Omega=\{(x,y)\mid x\ge 0,y\ge 0,x+y<1\}$

A＝{两边之和大于第三边}＝$\{(x,y)\mid 0<x<\frac{1}{2},0<y<\frac{1}{2},x+y>\frac{1}{2}\}$
$$P(A)=\frac{1}{4}$$
小结：1.常见的古典概型的类型；
2.一维、二维几何概型的计算.
</td>
</tr>
<tr>
<td>教学后记</td>
<td></td>
</tr>
</table>

章节（单元）教案

要　素	内　容			
章节名称	第一章　随机事件与概率		教学时数	2
单元内容	§1.3 概率的性质	时间	2021 年 9 月 7 日第 7、8 节	
教学目标	掌握随机事件的性质； 会应用随机变量的性质求随机事件的概率。			
思政目标	对学生进行思政教育,让学生学会从别人的角度思考问题,从观念的相反角度思考问题,不要固化自己。 让学生学会转换角度思考问题,特别是一个命题的逆否命题.			
重点难点	教学重点：随机事件的性质； 教学难点：随机事件的性质的证明。			
教学要求	1.掌握随机事件的性质； 2.会应用随机变量的性质求随机事件的概率；			
教学方法	课堂讲授、课堂讨论、课堂练习等			
授课方式	传统板书与多媒体课件辅助教学相结合.			
练　习 作　业	习题 1-3　第 1、2、16、17、18、19 题。			
参　考 资　料	[1]陈希孺.概率论与数理统计.北京:科学出版社.2002. [2]李贤平.概率论基础.3 版.北京:高等教育出版社.2010. [3] 盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计.北京:高等教育出版.2008.			

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程

一、概率的性质

性质 1. $P(\varnothing)=0$.

性质 2. 有限可加性： 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件, 则有

即若 $A_iA_j=\varnothing\ (1\le i<j\le n)$ 则 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

性质 3. 对任一随机事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$

（对学生进行思政教育，让学生学会从别人的角度思考问题,从观念的相反角度思考问题,不要固化自己）

性质 4. 设 A,B 是两个事件, 若 $A\subset B$ 则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，

$P(B)\ge P(A)$

证明　因为 $A\subset B$，从而有 $B=A\bigcup(B-A)$ ），且 $A(B-A)=\Phi$．由性质2得

$P(B)=P(A)+P(B-A)$ 所以 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

由于 $P(B-A)\ge 0$，因此 $P(B)\ge P(A)$

性质 5： 对任意事件 A，$P(A)\le 1$.

性质 6（减法公式）： 对事件 A,B, 则 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$

证明　由于 $B-A=B-AB$，而 $AB\subset B$ 根据性质4可得

性质 7: 对任意两个事件 A,B，有 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

推广:

$P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

证明: 因为 $A\bigcup B=A\bigcup(B-AB)$ 且 $A(B-AB)=\Phi, AB\subset B$，

由性质2及性质4得

$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$

教学流程	**一般地**, 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个随机事件，则有 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$ 此公式称为概率的一般加法公式。 **例 1**：设 $P(A)=0.4,\ \ P(B)=0.25,\ \ P(A-B)=0.25\ \ \ P(A\bigcup B)=0.6,$ 求(1) $P(AB)$；(2) $P(A\cup B)$；(3) $P(B-A)$；(4) $P(\overline{A}\overline{B})$. 解：(1) $P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.4-0.25=0.15$ (2) $P(A\cup B)=P(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P(AB)}=0.4+0.25-0.15=0.5$ ； (3) $P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.25-0.15=0.1$ (4) $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.5=0.5$ （让学生学会转换角度思考问题,特别是一个命题的逆否命题.） **例 2**：设 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，$P(AB)=0$ 求事件 A,B,C 全不发生的概率。 **解**：$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\bigcup B\bigcup C})$ 因为 $ABC\subset AB$，所以 $P(ABC)\subset PAB)$，而 $P(AB)=0$ 所以 $P(ABC)=0$ **练习** 设事件 A、B 的概率分别为 1/3、1/2，求在下列三种情况下 $\mathrm{P}(\mathrm{B}\overline{\mathrm{A}})$ 的值 （1）A 与 B 互不相容　（2）$\mathrm{A}\subseteq\mathrm{B}$　（3）P（AB）=1/8 解：（1）由已知得 $\mathrm{P}(\mathrm{B}\overline{\mathrm{A}})$ =P（B）=1/2 （2）$\mathrm{P}(\mathrm{B}\overline{\mathrm{A}})$ =P（B）-P（A）=1/6 （3）$\mathrm{P}(\mathrm{B}\overline{\mathrm{A}})$ =P（B-A）=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=3/8
教学后记	

章节（单元）教案

<table>
<tr><th>要　素</th><th colspan="4">内　容</th></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第一章　随机事件与概率</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>§1.4 条件概率（1）</td><td>时间</td><td colspan="2">2021 年 4 月 19 日第 12 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">掌握条件概率的定义；掌握乘法公式；会用条件概率、乘法公式计算随机事件的概率。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">在讲乘法公式的含义时，对学生进行思政教育：对人生重要的目标一定要坚持不懈，一步一个目标，才能完成。学习数学更是如此。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">教学重点：条件概率的定义，乘法公式。
教学难点：条件概率的计算。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">1. 掌握条件概率的定义；
2. 掌握乘法公式；
3. 会用条件概率、乘法公式计算随机事件的概率；
4. 对学生进行思政教育：对人生重要的目标一定要坚持不懈，一步一个目标，才能完成。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、课堂讨论、课堂练习等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">课堂讲解+课堂练习</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">习题 1-4　第 3、4、16、20、21 题。</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1]陈希孺. 概率论与数理统计. 北京:科学出版社. 2002.
[2]李贤平. 概率论基础. 3 版. 北京:高等教育出版社. 2010.
[3] 盛骤,谢式千,潘承毅. 概率论与数理统计. 北京:高等教育出版. 2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教
学
流
程</td>
<td>

一. 条件概率

例1 两台机器加工同一种产品，共100件，第一台机器加工合格品数为35件，次品数为5件，第二台机器加工合格品数为50件，次品数为10件．若从100件产品中任取一件产品，已知取到的是第一台机器加工的产品，问它是合格品的概率是多少．

解　令A＝“取到产品是第一台机器加工的”，B＝“取到产品为合格品”，于是所求概率是事件A发生的条件下事件B发生的概率，所以称它为A发生的条件下B发生的条件概率，并记作$P(B|A)$

$P(B|A)$可以用古典概型计算．因为取到的是第一台机器加工的，又已知第一台机器加工40件产品，其中35件是合格品，所以

$P(B|A)=\frac{35}{40}=0.875$．

另外，由于A B表示事件“取到的第一台机器加工的，并且是合格品”，而在100件产品中是第一台机器加工的又是合格品的产品为35件，所以

$P(AB)=\frac{35}{100}$，而$P(A)=\frac{40}{100}$，从而有$P(B|A)=\frac{35}{40}=\frac{\frac{35}{100}}{\frac{40}{100}}=\frac{P(AB)}{P(A)}$

定义：设A,B是两个事件，且$P(A)>0$，称$\frac{P(AB)}{P(A)}$为在事件A发生的条件下，事件B发生的条件概率，记为$P(B|A)$，即$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

同样, 可以在$P(B)>0$的条件下，定义在事件B发生的条件下，事件A发生的条件概率为$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

条件概率$P(A|B)$满足概率公理化定义中的三个基本性质：

1. 非负性　对任一事件B，$P(A|B)\geq 0$

</td>
</tr>
</table>

教学流程

2．**规范性**：$P(\Phi|A)=1$

3．**可列可加性**：设 $B_1,B_2,\cdots B_n\cdots$ 两两互斥

注：$P(\varnothing|A)=0$，$P(\bar{B}|A)=1-P(B|A)$

$$P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A)$$

计算条件概率 $P(B|A)$ 有两种方法：

（1）在样本空间Ω中，先求 $P(AB),P(A)$，再按定义计算 $P(B|A)$

（2）在缩减的样本空间 Ω_A 中求事件B的概率，可得到 $P(B|A)$

例2 一袋中有10只球，其中3只黑球，7只白球，依次从袋中不放回取两球.

（1）已知第一次取出的是黑球，求第二次取出的仍是黑球的概率；

（2）已知第二次取出的是黑球，求第一次取出的也是黑球的概率.

解　记 A_i＝“第 i 次取到黑球”（$i=1,2$）

（1）可以在缩减的样本空间 Ω_{A_1} 上计算.

因为 A_1 已发生，即第一次取得的是黑球，第二次取球时，所有可取的球只有9只．Ω_{A_1} 中所含的基本事件数为9，其中黑球只剩下2只，

所以 $P(A_2|A_1)=\dfrac{2}{9}$.

（2）由于第二次取球发生在第一次取球之后，故缩减的样本空间 Ω_{A_2} 的结构并不直观，因此，直接在Ω中用定义计算 $P(A_1|A_2)$

因为 $P(A_1A_2)=\dfrac{3\times 2}{10\times 9}=\dfrac{1}{15}$.

又由 $A_2=A_1A_2\cup\bar{A}_1A_2$ 且 A_1A_2 与 $\bar{A}_1A_2$ 互不相容.

故 $P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\bar{A}_1A_2)=\dfrac{3\times 2}{10\times 9}+\dfrac{7\times 3}{10\times 9}=\dfrac{3}{10}$.

例3 设某种动物由出生起活20岁以上的概率为80%，活25岁以上的概率为40%. 如果现在有一个20岁的这种动物，问它能活25岁以上的概率？

教学流程	解　记 A =“该动物活到20岁”，B =“该动物活到25岁”，显然 $B \subset A$，则 $AB = B$． 又 $P(A)$ =0．8，　$P(B)$ =0．4， $P(AB) = P(B)$ =0．4． 所以 $P(B\|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.8} = \frac{1}{2}$． 二、乘法公式 **1 定理 1（乘法公式）**　设 $P(A) > 0$ 则有 $P(AB) = P(A)P(B \mid A)$ 设 $P(B) > 0$ 则有 $$P(AB) = P(B)P(A \mid B)$$ 它表明，两个事件同时发生的概率等于其中一个事件发生的概率与另一事件在前一事件发生下的条件概率的乘积. **2、推广：三个事件的乘法公式:** 设 A,B,C 为三个事件, 且 $P(AB) > 0$ $$P(ABC)=P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB)$$ **3. 多个事件乘法公式的推广：** 设 $A_1A_2\cdots A_n$ 为 n 个事件，当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$ 时，有 $$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$ **证明：** 因 $A_1 \supseteq A_1A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_1A_2\cdots A_{n-1}$， 故 $P(A_1) \geq P(A_1A_2) \geq \cdots \geq P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$ 又 $P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)\cdot\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\cdot\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\cdots\frac{P(A_1A_2\cdots A_n)}{P(A_1A_2\cdots A_{n-1})}$ $=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$ （结合乘法公式的实际意思,对学生进行思政教育，让学生明白：不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海。对人生重要的目标一定要坚持不懈，一步一个目标，才能完成。学习数学更是如此，一步跟不上，步步跟不上，大家一定要认真学习，为以后的学习打下基础。）

教学流程	例 甲、乙两市都位于长江下游，据一百多年来的气象记录，知道在一年中的雨天的比例甲市占20%，乙市占18%，两地同时下雨占12%. 记 A={甲市出现雨天} B ={乙市出现雨天} 求：1）两市至少有一市是雨天的概率； 2）乙市出现雨天的条件下，甲市也出现雨天的概率； 3）甲市出现雨天的条件下，乙市也出现雨天的概率。 解：1）$P(A\cup B)=0.26$ 2）$P(A\|B)=0.67$ 3）$P(B\|A)=0.60$ 例3 （抽签问题）有一张电影票，7个人抓阄决定谁得到它，问第i个人抓到票的概率是多少？ 解：设A_i=“第i个人抓到票”，（i=1，2，…，7） 显然，$P(A_1)=\frac{1}{7}, P(\overline{A})=\frac{6}{7}$ 如果第二个人抓到票的话，必须第一个人没有抓到票。 这就是说$A_2\subset\overline{A}_1$，所以$A_2=A_2\overline{A}_1$ 于是可以利用概率的乘法公式，因为在第一个人没有抓到票的情况下，第二个人有希望在剩下的6个阄中抓到电影票， 所以 $P\left(A_2\middle\|\overline{A}_1\right)=\frac{1}{6}$， $P(A_2)=P\left(A_2\overline{A}_1\right)=P\left(\overline{A}_1\right)P\left(A_2\middle\|\overline{A}_1\right)=\frac{6}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{7}$， 类似可得 $P(A_3)=P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\right)=P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\middle\|\overline{A}_1\right)P\left(A_3\middle\|\overline{A}_1\overline{A}_2\right)=\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{7}$， … $P(A_7)=\frac{1}{7}$。 小结： **1.条件概率的定义** $$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad(P(B)\neq 0).$$ **2.计算条件概率$P(B\|A)$有两种方法：** （1）在样本空间Ω中，先求$P(AB),P(A)$，再按定义计算$P(B\|A)$. （2）在缩减的样本空间Ω_A中求事件B的概率，可得到$P(B\|A)$.

教学流程	**3. 乘法公式** $$P(AB)=P(B)P(A\mid B).$$ 设 $A_1A_2\cdots A_n$ 为 n 个事件, 当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时，有 $$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$
教学后记	

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第一章　随机事件与概率</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>§1.4 条件概率（2）</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　日第　　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">掌握全概率公式、贝叶斯公式；会用全概率公式、贝叶斯公式解决实际的问题。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">在贝叶斯公式例题的讲解中，让学生明白某车间次品率高的影响因素。让学生摈弃可以蒙混过关的想法，培养学生踏踏实实工作、学习的精神。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">教学重点：全概率公式、贝叶斯公式。
教学难点：全概率公式、贝叶斯公式的应用。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">1.掌握全概率公式、贝叶斯公式；
2.会用全概率公式、贝叶斯公式解决实际的问题；</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、课堂讨论、课堂练习等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">课堂讲解+课堂练习</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">习题 1-4　第 20、21 题。</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1]陈希孺.概率论与数理统计.北京:科学出版社.2002.
[2]李贤平.概率论基础.3 版.北京:高等教育出版社.2010.
[3] 盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计.北京:高等教育出版.2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程

一、复习引入

1.条件概率的定义

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad (P(B)\neq 0).$$

2.计算条件概率 $P(B|A)$ 有两种方法：

（1）在样本空间 Ω 中，先求 $P(AB),P(A)$，再按定义计算 $P(B|A)$.

（2）在缩减的样本空间 Ω_A 中求事件 B 的概率，可得到 $P(B|A)$.

3.乘法公式

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B).$$

设 $A_1A_2\cdots A_n$ 为 n 个事件，当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时，有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})\ .$$

二、全概率公式与贝叶斯公式

全概率公式是概率论中的一个基本公式。它使一个复杂事件的概率计算问题，可化为在不同情况或不同原因或不同途径下发生的简单事件的概率**教**
学
流
程的求和问题。

定理3（全概率公式）： 设随机试验 E 的样本空间为 Ω，B 为 E 的任意事件，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 Ω 的一个完备事件组，

（即 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$ 且 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容），且

$P(A_i)>0(i=1,2,\cdots n)$，则 $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$

全概率公式说明，在复杂情况下直接计算 $P(B)$ 不易时，可根据具体情况构造一完备事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，使事件 B 发生的概率是各事件 $A_i,(i=1,2,\cdots,n)$ ）发生的条件下引起事件 B 发生的概率的总和.

教学流程	若已经观察到一个事件 B 已经发生，再来研究事件发生的各种原因、情况或途径的可能性的大小，就需要给出贝叶斯公式. **定理4（贝叶斯公式）** 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一完备事件组，且 $P(A_i) > 0(i = 1, 2, \cdots n)$．则对任一事件 B，$P(B) > 0$，有 $$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B \mid A_j)}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$ **例2** 已知自然人患有某种疾病的概率为，据以往记录，某种诊断该疾病的试验具有如下效果，被诊断患有该疾病的人试验反应为阳性的概率为，被诊断不患有该疾病的人试验反应为阳性的概率为，在普查中发现某人试验反应为阳性，问他确实患有该疾病的概率是多少？ 解　设事件 B ＝“试验反应为阳性”，A =“被诊断者患有此疾病”，则 $\overline{A}$ ＝“被诊断者不患有此疾病”． 由已知 $P(A) = 0.005$， $$P(\overline{A}) = 1 - 0.005 = 0.995,\ P(B \vert A) = 0.95, P(B \vert A) = 0.06$$ 由全概率公式 $$P(B) = P(A)P(B \vert A) + P(\overline{A})P(B \vert \overline{A}) = 0.005 \times 0.05 + 0.995 \times 0.06. = 0.6445$$ **例3** 玻璃杯成箱出售，每箱20只，假设各箱含0, 1, 2只残次品的概率相应地为, 和．一顾客欲买一箱玻璃杯，在购买时，顾客随机地查看4只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回．试求： （1）顾客买下该箱玻璃杯的概率； （2）在顾客买下的一箱玻璃杯中，确实没有残次品的概率． 解　设 B ＝“顾客买下该箱玻璃杯” A_i ＝ “箱中恰有 i 只残次品” $(i = 0, 1, 2)$ 显然，A_0, A_1, A_2 为 Ω 的完备事件组，由题意， （1）由全概率公式得 $$\alpha = P(A) = \sum_{i=0}^{2} P(A \vert B_i)P(B_i)$$

教学流程	$$=0.8\times 1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}\approx 0.94$$ (2)由贝叶斯公式 $$\beta=P(B_0\|A)=\frac{P(A\|B_0)P(B_0)}{P(A)}\approx\frac{0.8}{0.94}\approx 0.85$$ **例4** 某工厂有甲、乙、丙三台机器，它们的产量分别占总产量的25%，，35%，40%，而它们的产品中的次品率分别为5%，4%，2%. （1）从所有产品中随机取一件，求所取产品为次品的概率； （2）从所有产品中随机取一件，若已知取到的是次品，问此次品分别是由甲、乙、丙三台机器生产的概率是多少？ **解**:1）设B＝“取出的产品为次品” 又设A_1＝“所取产品来自甲台”，A_2＝“所取产品来自乙台”， A_3＝“所取产品来自丙台”． 由于$A_1\cup A_2\cup A_3=\Omega$，$A_1,A_2,A_3$两两互不相容，所以 $B=A_1B\cup BA_2\cup BA_3$且A_1B,BA_2,BA_3也两两互不相容，于是 $$P(B)=P(A_1B)+P(BA_2)+P(BA_3)$$ 又已知$P(A_1)=0.25$，$P(A_2)=0.35$，$P(A_3)=0.40$ 故所求概率： $$P(B)=0.25\times 0.05+0.35\times 0.04+0.40\times 0.02=0.0345.$$ 2）$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{0.25\times 0.05}{0.0345}=36\%$， $$P(A_2\mid B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{0.35\times 0.04}{0.0345}=41\%，$$ $$P(A_3\mid B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{0.40\times 0.02}{0.0345}=23\%.$$

教学流程	(让学生明白某车间次品率高受哪些因素影响。让学生摈弃可以蒙混过关的想法，培养学生踏踏实实工作、学习的精神) **练习 1** 设有五个坛子，大号坛子两个，各装两个白球一个黑球，中号坛子两个，各装三个白球一个黑球，小号坛子一个，装有十个黑球。如任选一个坛子，从中取出一球，问这球是黑球的概率是多少 **练习 2** 对以往的数据分析结果表明当机器调整得良好时，产品的合格率为 90% ， 而当机器发生某一故障时，其合格率为 30% 。每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为 75% 。已知某天早上第一件产品是合格品，试求机器调整得良好的概率是多少？
教 学 后 记	

章节（单元）教案

<table>
<tr><th>要　素</th><th colspan="4">内　容</th></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第一章　　随机事件与概率</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>§1.5　事件的独立性</td><td>时间</td><td colspan="2">2021 年月日第 7、8 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">掌握二个随机事件、多个随机事件独立的定义；掌握独立随机事件的性质；会运用随机事件独立的定义及性质进行随机事件的和与积的计算。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">由随机事件独立的定义,对学生进行思政教育,使学生学会独立思考,不要受社会上不良的思潮影响。独立思考的前提是不忘初心，放弃一些不重要的事情，为人生目标前进。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">教学重点：独立的定义、独立的性质；
教学难点：多个随机事件独立的定义。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">1.掌握二个随机事件、多个随机事件独立的定义；
2.掌握独立随机事件的性质；
3.会运用随机事件独立的定义及性质进行随机事件的和与积的计算；
4.对学生进行思政教育，使学生学会独立思考,能够不忘初心，放弃一些不重要的事情，为人生目标前进。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、课堂讨论、课堂练习等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">课堂讲解+课堂练习</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">习题 1-5　第 2、6、23、24、25 题。</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1]陈希孺.概率论与数理统计.北京:科学出版社.2002.
[2]李贤平.概率论基础.3 版.北京:高等教育出版社.2010.
[3] 盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计.北京:高等教育出版.2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教
学
流
程</td>
<td>

一两个事件的独立性

定义 1：若两事件 A，B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$ 成立则称事件 A，B 相互独立，或称 A，B 独立.

注：(1)两事件互不相容与相互独立是完全不同的两个概念，它们分别从两个不同的角度表达了两事件间的某种联系，互不相容是表述在一次随机试验中两事件不能同时发生，而相互独立是表述在一次随机试验中一事件是否发生与另一事件是否发生互无影响.

（由随机事件独立的定义，对学生进行思政教育,使学生学会独立思考,不要受社会上不良的思潮影响。独立思考的前提是不忘初心，放弃一些不重要的事情，为人生目标前进。）

(2) 当 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 时，A，B 相互独立与 A，B 互不相容不能同时成立. 但 $\varnothing$ 与 S 既相互独立又互不相容.

证明：由于事件 A 与 B 相互独立，故 $P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)\neq 0$.

由于 $\mathrm{AB}=\Phi$，所以 $P\left(AB\right)=P\left(\Phi\right)=0$. 但是，由题设 $P\left(A\right)P\left(B\right)\neq 0$

所以，$P\left(AB\right)\neq P\left(A\right)P\left(B\right)$ 这表明，事件 A 与 B 不相互独立.

所以当 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 时，A，B 相互独立与 A，B 互不相容不能同时成立.

定理1 设 A，B 是两事件，若 A，B 相互独立，且 $P\left(A\right)>0, P\left(B\right)>0$

则 $P(A|B)=P(A), P\left(B|A\right)=P\left(B\right)$.

反之，$P(A|B)=P(A)$, 或 $P\left(B|A\right)=P\left(B\right)$，则 A,B 相互独立.

证明 若 A,B 相互独立，则 $P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$

</td>
</tr>
</table>

教学流程	当 $P(B)>0$ 时，有 $P(A\|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$ 反之若 $P(A\|B)=P(A)$, 则 $P(AB)=P(B\|A)P(A)=P(B)P(A)$ 故 A，B 相互独立. **定理 2** 若事件A与事件B相互独立，则A与$\overline{B}$,$\overline{A}$与B,$\overline{A}$与$\overline{B}$也分别相互独立. **证**:由 $P(AB)=P(A)P(B)$,故 $P(A\overline{B})=P(A-B)$ $=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$ **注意：**在实际应用中，对于事件的独立性，我们往往不是根据定义来判断，而是根据实际意义来加以判断的。具体的说，题目一般把独立性作为条件告诉我们，要求直接应用定义中的公式进行计算。 **例1** 从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记 $A=$“抽到K”，$B=$“抽到的牌是黑色的”，判断事件 A,B 是否独立。 **解**:利用定义判断，由 $P(A)=\dfrac{1}{4},P(B)=\dfrac{4}{52}=\dfrac{1}{13}.$ 得到 AB = “抽到黑色K”, $P(AB)=\dfrac{1}{52}.$ 所以 $P(AB)=P(A)P(B)$,故事 A,B 相互独立. **例 2** 甲乙二人独立地向同一目标射击，甲击中目标的概率为 0.9，乙击中目标的概率为 0.8.试计算目标被击中的概率. **解** ： 设 A 表示“甲击中目标”， B 表示“乙击中目标”， 则 $P(A)=0.9,P(B)=0.8$， $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$ $=0.9+0.8-0.9\times 0.8=0.98.$ **二、有限个事件的独立性** 多个事件的独立性 **定义 2.** 设三个事件 A,B,C 满足

教学流程	P(AB)=P(A)P(B)　P(AC)=P(A)P(C)　P(BC)=P(B)P(C) P(ABC)=P(A)P(B) P(C)　称 A,B,C 相互独立。 由三个事件的独立性可知，若 A、B、C 两两相互独立，反之不一定成立。 **例 4**　一个均匀的正四面体，其第一面染成红色，第二面染成白色，第三面染成黑色第四面上同时染上红、黑、白三色，以 A、B、C 分别记投一次四面体，出现红、白、黑颜色的事件，则 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$　$P(ABC)=\frac{1}{4}$ 故 A、B、C 两两相互独立. 但不能推出 $P(ABC)=P(A)\times P(B)\times P(C)$. 同样地, 由 $P(ABC)=P(A)\times P(B)\times P(C)$ 不能推出 A、B、C 两两相互独立。 **定义 3**. 对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 若对于所有可能的组合 $1\le i\le j\le k\le\cdots\le n$，有 $P(A_iA_j)=P(A_i)p(A_j)$ $P(A_iA_jA_k)=P(A_i)p(A_j)p(A_k)$ …… $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)p(A_2)\cdots p(A_n)$ 则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。 n 个事件相互独立，则必须满足 2^n-n-1 个等式. 显然 n 个事件相互独立，则它们中的任意 $m\,(2<m<n)$ 个事件也相互独立。 **定义4**　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，若其中任意两个事件均相互独立，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相互独立. 可见 n 个事件相互独立，可推得 n 个事件两两相互独立，反之

教学流程	未必.

多个相互独立事件具有如下性质：

性质1 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则其中任意 $m(1 < m \le n)$ 个事件也相互独立.

性质2 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意 $m(1 < m \le n)$ 个事件换成它们的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立.

特别是，若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则 $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_n$ 也相互独立.

利用多个事件的独立性，可以简化概率的计算.

（1）计算 n 个相互独立的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积的概率，可简化为

(2) 计算 n 个相互独立的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和的概率，可简化为

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \quad = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right)$$

证明: $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \quad = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n})$

例3 一个人看管三台机床，设各台机床在任一时刻正常工作的概率分别为, , ，求在任一时刻，

（1）三台机床都正常工作的概率；

（2）三台机床中至少有一台正常工作的概率.

解: 三台机床工作正常与否是相互独立的，

记 $A_i =$ “第 i 台机床正常工作”（$i = 1,2,3$），则

（1）所求概率为

（2）所求概率为 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \quad = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})$

$= 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3)$

例4 有两名选手比赛射击，轮流射击同一目标，甲每枪命中的概率为 α，乙每枪命中的概率为 β，甲先射，谁先击中谁获胜，问甲乙获胜的概率各多少？

教学流程	**解：** 设 A_i 为第 i 次命中目标，则 $$P(\text{甲获胜}) = \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)\alpha + (1-\alpha)^2(1-\beta)^2\alpha + \cdots$$ $$= \alpha\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^i(1-\beta)^i$$ $$= \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}.$$ $$P(\text{乙胜}) = P(\overline{A_1}A_2 \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4 \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5}A_6 \cup \cdots)$$ $$= \beta(1-\alpha) + \beta(1-\alpha)^2(1-\beta) + \beta(1-\alpha)^3(1-\beta)^2 + \cdots$$ $$= \frac{\beta(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}$$ **三、伯努利概型** 在概率论中，只考虑两个可能结果的随机试验称为伯努利试验．为方便起见，将两个可能结果说成事件 A 发生或事件 A 不发生，记 $P(A)=p, P(\overline{A})=1-p=q \quad ((0<p<1, p+q=1)$, 将伯努利试验在相同条件下独立地重复进行 n 次，称这一串重复的独立试验为 n 重伯努利试验，或简称为伯努利概型． n 重伯努利试验是一种很重要的数学模型，在实际问题中应用广泛，特点是事件 A 在每次试验中发生的概率均为 p ，且不受其他各次试验中 A 是否发生的影响．对于伯努利概型，主要研究 n 次试验中事件 A 发生 $k(0 \le k \le n)$ 次的概率． **定理 3（伯努利定理）** 设在一次试验中，事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$, 则在 n 重伯努利试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率为 证明　在 n 重伯努利试验中，由于各次试验是相互独立进行的，因此事件 A 在指定的 $k(0 \le k \le n)$ 次试验中发生，其余 $n-k$ 次试验中均不发生（比如在前 k 次试验中发生，在后 $n-k$ 次试验中均不发生）的概率为 $pp\cdots pqq\cdots q = p^k q^{n-k}$． k=0, 1, 2,$\cdots$ n 由于这样的指定方式共有 C_n^k 种，根据概率的加法公式可得．在

教学流程

n次试验中A发生k次的概率$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},(k=0,1,\cdots,n)$

定理4 设在一次试验中，事件A发生的概率为$p(0<p<1),$，则在伯努利试验序列中，事件A在第k次试验中才首次发生的概率为

$$pq^{k-1},(k=1,2,\cdots,),q=1-p$$

证明 “事件A在第k次试验中首次发生”等价于“事件A在前$k-1$次试验中均不发生而第k次试验中发生”，故所求的概率

$$pq^{k-1},(k=1,2,\cdots,),q=1-p.$$

例5 一袋中装有10只球，其中3只黑球，7只白球，每次从中随意取出一球，取后放回.

（1）如果共取10次，求10次中恰好3次取到黑球的概率及10次中能取到黑球的概率；

（2）如果未取到黑球就一直取下去，直到取到黑球为止，求恰好要取3次的概率及至少要取3次的概率.

解: 设$A_i=$“第 i 次取到黑球”，则$P(A_i)=\dfrac{3}{10},i=1,2,\cdots$

（1）设$B=$“10次中能取到黑球”，$B_k=$ “10次中恰好取到 k 次黑球”，$k=0,1,2,\cdots10$，于是10次中恰好3次取到黑球的概率，

10次中能取到黑球的概率.

（2）设$C=$“恰好要取3次”$D=$“至少要取3次”，

则所求概率为

$$P(C)=(\frac{7}{10})^2\cdot\frac{3}{10}\qquad P(D)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)=\left(\frac{7}{10}\right)^2.$$

例6 设在独立重复试验中每次事件A发生的概率为，问最少需要进行多少次试验，才能使事件A至少发生一次的概率不小于0.9.

解：设最少需要进行n次独立重复试验，则在n次试验中事件A至少发生一次的概率为

$$1-P_n(0)=1-(1-0.5)^n\geq0.9$$

解得$n\approx3.3$所以$n=4$.

教 学 流 程	**练习** 1 三人独立地去破译一份密码，已知每个人能译出的概率分别为 1/5，1/3，1/4。问三人中至少有一人能将密码译出的概率是多少 ？
教　学 后　记	

章节（单元）教案

要　素	内　容			
章节名称	第二章 随机变量及其分布		教学时数	2
单元内容	2.1随机变量及其分布(1)	时间	2021年 月 日 7、8节	
教学目标	了解随机变量的含义；掌握随机变量的分布函数的定义及其性质；掌握离散型随机变量的定义、分布律及其性质；			
思政目标	在讲离散型随机变量的分布函数时,对学生进行思政教育。任何事情都必须积累，只有积累到一定程度才会成功。我们应该摒弃天上掉馅饼的思想，脚踏实地地过好每一天。			
重点难点	教学重点：随机变量分布函数的性质，离散型随机变量的性质及分布函数。 教学难点：随机变量分布函数的性质。			
教学要求	1.了解随机变量的含义； 2.掌握随机变量的分布函数的定义及其性质； 3.掌握离散型随机变量的定义、分布律及其性质；			
教学方法	课堂讲授、课堂讨论、课堂练习，启发式与提问式相结合等			
授课方式	传统板书与多媒体课件辅助教学相结合.			
练　习 作　业	习题2-1　第8、9、10、13、14、17题.			
参　考 资　料	[1]陈希孺.概率论与数理统计.北京:科学出版社.2002. [2]李贤平.概率论基础.3版.北京:高等教育出版社.2010. [3] 盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计.北京:高等教育出版.2008.			

注：一个教学单元是指一次理论课（2学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程	一、导入 **一、随机变量概念的引入** 为全面研究随机试验的结果，揭示随机现象的统计规律性，需将随机试验的结果数量化，即把随机试验的结果与实数对应起来. **1.在有些随机试验中，试验的结果本身就由数量来表示.** **例如：**在掷骰子试验中,结果可用1,2,3,4,5,6来表示. **2.在另一些随机试验中，试验结果看起来与数量无关,但可以指定一个数量来表示.** **例如：**掷硬币试验,其结果是用汉字“正面”和“反面”来表示的，可规定:用1表示 “正面朝上” 用 0 表示“反面朝上”. **二、随机变量的定义** **1 定义** 设随机试验的样本空间为Ω，对每个$\omega\in\Omega$,都有一个实数$X(\omega)$与之对应,则称$X(\omega)$为随机变量.简记为X. 随机变量通常用英文大写字母X,Y,Z或希腊字母ξ,η等表示。 随机变量的取值一般用小写字母x,y,z等表示。 **2 随机变量的特征** 1）它是一个变量； 2）它的取值随试验结果而改变； 3）随机变量在某一范围内取值，表示一个随机事件，具有一定的概率. **三、引入随机变量的意义** 随机变量的引入,使得随机试验中的各种事件可通过随机变量的关系式表达出来.由此可见,随机事件这个概念实际上是包容在随机变量这个更广的概念内.也可以说,随机事件是从静态的观点来研究随机现象,而随机变量则以动态的观点来研究之.其关系类似高等数学中常量与变量的关系. 随机变量概念的产生是概率论发展史上的重大事件. 引入随机

教学流程

变量后，对随机现象统计规律的研究，就由对事件及事件概率的研究转化为随机变量及其取值规律的研究，使人们可利用数学分析的方法对随机试验的结果进行广泛而深入的研究.

四、随机变量的类型

随机变量因其取值方式不同，通常分为离散型和非离散型两类. 而非离散型随机变量中最重要的是连续型随机变量.

离散型：随机变量的所有取值是有限个或可列个

连续性：随即变量的取值是某个区间或整个数轴

一. 离散型随机变量的概率分布

1、定义：如果随机变量 X 的取值是有限个或可列无穷个，则称 X 为离散型随机变量.

2、**定义(概率分布)**

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 x_1， x_2， $\cdots$， x_n， $\cdots$ ，

X 取各个可能值的概率, 即事件 $\{X=x_i\}$ 的概率为

$$P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\cdots$$

则称其为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律.

常用表格形式来表示 X 的概率分布:

注：离散型随机变量可完全由其分布律来刻划. 即离散型随机变量可完全由它的可能取值以及取这些值的概率唯一确定.

当我们要描述一个随机变量时，不仅要说明它能够取哪些值，而且还要指出它取这些值的概率. 只有这样，才能真正完整地刻画一个随机变量，为此，我们引入随机变量的分布函数的概念.

二. 随机变量的分布函数

1. 定义 设 X 是一个随机变量，称 $F(x)=P(X\le x)\quad(-\infty<x<+\infty)$ 为 X 的**分布函数.**

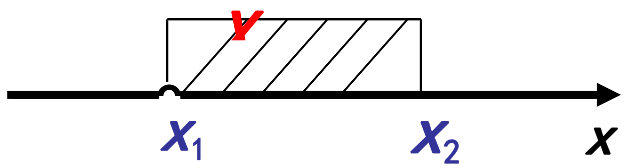
注：分布函数是一个普通的函数，其定义域是整个实数轴.

在几何上，它表示随机变量 X 的取值落在实数 x 左边的概率

教学流程

对于任意的实数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$，有

-------用分布函数计算某些事件的概率



2. 分布函数的性质

1. 单调非减. 若 $x_1 < x_2$， 则 $F(x_1) \le F(x_2)$；

2. 规范性 $0 \le F(x) \le 1$　$F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1;$

3. 右连续性. 即 $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0).$

反之，具有上述三个性质的实函数，必是某个随机变量的分布函数。故该三个性质是分布函数的充分必要性质。

3. 离散型随机变量的概率分布

1、定义：如果随机变量 X 的取值是有限个或可列无穷个，则称 X 为离散型随机变量.

2、**定义(概率分布)**

设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 x_1， x_2， $\cdots$， x_n， $\cdots$ ，

X 取各个可能值的概率, 即事件 $\{X = x_i\}$ 的概率为

$$P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, 2, \cdots$$

则称其为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律.

常用表格形式来表示 X 的概率分布:

注：离散型随机变量可完全由其分布律来刻划. 即离散型随机变量可完全由它的可能取值以及取这些值的概率唯一确定.

离散型随机变量分布律的性质:

例 1　一箱中装有6个产品，其中有2个是二等品，现从中随机地取出3个，试求取出的二等品个数 X 的概率分布.

解:　随机变量 X 的可能取值是0, 1, 2，在6个产品中任取3个，共

教学流程	$C_6^3=20$种取法，故 $P\{X=0\}=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$， $P\{X=1\}=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，$P\{X=2\}=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$. 所以，$X$的概率分布为 $\begin{array}{c\|ccc} X & 0 & 1 & 2 \\ \hline p_i & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}$ **例 2**：设随机变量X的分布律为$P\{X=n\}=c\left(\frac{1}{4}\right)^n$（$n=1$， 2， $\cdots$） 试求常数c. **解**：由随机变量的性质，得$1=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^n$ 该级数为等比级数，故有$1=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^n=c\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$ 所以$c=3$. 设离散型随机变量X的概率分布为 则X的分布函数为$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_i\le x}P(X=x_i)=\sum_{x_i\le x}p_i$ **例 3**：设随机变量X的分布律为$\begin{array}{c\|ccc} X & 1 & 2 & 3 \\ \hline p_i & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array}$，求它的分布函数$F(x)$，并求$P\left\{X\le\frac{3}{2}\right\}$，$P\{2\le X\le 3\}$. **解**：由概率的有限可加性得分布函数为： $$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{1}{6} & 1\le x<2\\ \frac{2}{3} & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$

<table>
<tr><td>教学流程</td><td>

一般地，对离散型随机变量 $P(X=x_k)=p_k(k=1,2,\cdots)$

其分布函数为 $F(x)=P\{X\le x\}=\sum\limits_{x_k\le x}P\{X\le x\}=\sum\limits_{x_k\le x}p_k$.

结论: 离散型随机变量的分布函数是阶梯函数, 分布函数的跳跃点对应离散型随机变量的可能取值点, 跳跃高度对应随机变量取对应值的概率;

反之, 如果某随机变量的分布函数是阶梯函数, 则该随机变量必为离散型.

例 2 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 9/19, & -1\le x<2,\\ 15/19, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

求 X 的概率分布.

解 由于 $F(x)$ 图形是一个阶梯型曲线，故知 X 是一个离散型随机变量， $F(x)$ 的跳跃点分别为 $-1,2,3$ 对应的跳跃高度分别为 9/19, 6/19, 4/19.

（对学生进行思政教育：任何事情都必须积累，只有积累到一定程度才会成功。我们应该摒弃天上掉馅饼的思想，脚踏实地地过好每一天。）

</td></tr>
<tr><td>教学后记</td><td></td></tr>
</table>

章节（单元）教案

要　素	内　容		
章节名称	第二章 随机变量及其分布	教学时数	2
单元内容	2.1 随机变量及其分布（2）	时间	2021 年　月　日 7、8 节
教学目标	掌握连续型随机变量的定义、密度函数、分布函数及其性质；		
思政目标	在讲连续型随机变量的概率时,对学生进行思政教育。有些事情对我们人生的目标不会产生影响,我们一定要学会抓大放小,对于自己人生目标不重要的事情可以忽略。		
重点难点	教学重点：连续型随机变量密度函数、分布函数的关系及其性质。 教学难点：连续型随机变量密度函数、分布函数性质的应用。		
教学要求	1. 掌握连续型随机变量的定义、密度函数及其性质. 2. 对学生进行思政教育，对于自己人生目标不重要的事情可以忽略.		
教学方法	课堂讲授、课堂讨论、课堂练习，启发式与提问式相结合等		
授课方式	传统板书与多媒体课件辅助教学相结合.		
练　习 作　业	习题 2-1　第 8、9、10、13、14、17 题.		
参　考 资　料	[1]陈希孺. 概率论与数理统计. 北京:科学出版社. 2002. [2]李贤平. 概率论基础. 3 版. 北京:高等教育出版社. 2010. [3] 盛骤,谢式千,潘承毅. 概率论与数理统计. 北京:高等教育出版. 2008.		

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程	一、导入 例 半径为 2 米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并设射击都能中靶，以 X 表示弹着点与圆心的距离. 试求随机变量 X 的分布函数. **解：** 1） 若 $x<0$ 则 $\{X\le x\}$ 是不可能事件，于是 $$F(x)=P\{X\le x\}=P(\varnothing)=0$$ 2) 若 $x\ge 2$ ， 则 $\{X\le x\}$ 是必然事件，于是 $$F(x)=P\{X\le x\}=1$$ **1. 连续型随机变量及其概率密度** **定义** 如果对随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，存在非负函数 $f(x)$，使得对于任意实数 x 有 $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ 则称 X 为连续型随机变量，称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数，简称为概率密度或密度函数. 概率密度 $f(x)$ 性质： (1) 非负性 $f(x)\ge 0$ (2) 正则性 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ 以上两条是判定一个函数是否为某个随机变量的密度函数的充要条件. 关于概率密度的说明 (3) 对一个连续型随机变量 X，若已知其密度函数 $f(x)$，则根据定义，可求得其分布函数 $F(x)$，同时，还可求得 X 的取值落在任意区间 $(a,b]$ 上的概率：

教学流程

(4) 连续型随机变量 X 取任一指定值 $x_0(x_0 \in R)$ 的概率为 0.

$P\left\{X = x_0\right\} = 0$

因 $P\left\{X = x_0\right\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^{=}} P\left\{x_0 - \Delta x < X \le x_0\right\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^{=}} \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0} f(x)dx = 0$

注： 概率为 0 的事件不一定是不可能事件. 同样，概率为 1 的事件也不一定是必然事件。

从而

$P\{a < X < b\} = P\{a \le X < b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a \le X \le b\} = \int_a^b f(x)dx$

（对学生进行思政教育。有些事情对我们人生的目标不会产生影响，我们一定要学会抓大放小，对于自己人生目标不重要的事情可以忽略。）

例 1：设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 确定常数 k，(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$，(3) $P\{\frac{3}{2} \le X \le \frac{5}{2}\}$.

解 (1) 由密度函数的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ 得 $\int_0^2 (kx+1)dx = 1,$

解得： $k = -\frac{1}{2}.$

X 的概率密度为：

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(2) X 的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -\frac{1}{4}x^2 + x, & 0 \le x \le 2, \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

(3) $P\{\frac{3}{2} \le X \le \frac{5}{2}\} = F(\frac{5}{2}) - F(\frac{3}{2}) = 1 - [-\frac{1}{4}.(\frac{3}{2})^2 + \frac{3}{2}] = \frac{1}{16}$

教学流程	例 2. 某电子元器件的寿命为 X，其密度为 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2}, & x\ge 1000,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$ 各个元件的工作是独立的，问： （1）任取一只，其寿命大于 1500 小时的概率是多少？ （2）任取 4 只，4 只寿命都大于 1500 小时的概率是多少？ （3）任取 4 只，4 只中至少一只寿命大于 1500 小时的概率是多少？ （4）若已知一只寿命大于 1500 小时，则该元件的寿命大于 2000 小时的概率是多少？ **解：**（1）$P(X>1500)=\int_{1500}^{+\infty}p(t)dt=\int_{1500}^{+\infty}\frac{1000}{t^2}dt=\frac{2}{3}$ （2） $$P(X_1>1500,X_2>1500,X_3>1500,X_4>1500)=[P(X_1>1500)]^4=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$ （3） $$P=1-P(X_1<1500,X_2<1500,X_3<1500,X_4<1500)=1-[P(X_1<1500)]^4=1-\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{80}{81}.$$ （4）记 $A=\{X>1500\},B=\{X>2000\}$，则 所以 $$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{1/2}{2/3}=\frac{3}{4}.$$ 注意在计算过程中，针对连续型随机变量，一个点的概率质量认定为 0.
教学后记	

章节（单元）教案

<table>
<tr><th>要　素</th><th colspan="4">内　容</th></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第二章 随机变量及其分布</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>2.2 随机变量的数学期望</td><td>时间</td><td colspan="2">2021 年 月 日 7、8 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">会应用期望的定义计算随机变量的数学期望；掌握随机变量数学期望的性质，并且能运用其进行随机变量的计算；掌握随机变量函数的数学期望，并且可以应用其计算随机变量函数的数学期望。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">在引入里，让学生一定要远离赌博，养成良好的生活习惯。
在讲解”血液普查”例题时,结合当前的疫情,讲解我国以人为本的清零政策.培养学生的爱国主义精神,培养学生作为中国人的自豪感。
在讲解彩票中奖率的例题时,让学生明白彩票的中奖率是很低的,偶而买几注可以,不能异想天开.做事情还得脚踏实地,一步一个脚印去做,才能取得成功.</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">教学重点：随机变量数学期望、随机变量函数的数学期望的计算，随机变量数学期望的性质。
教学难点：随机变量函数的数学期望的计算。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">1.会应用期望的定义计算随机变量的数学期望；
2.掌握随机变量数学期望的性质，并且能运用其进行随机变量的计算；
3.掌握随机变量函数的数学期望；
4.对学生进行思政教育，对其讲解赌博的坏处，让学生远离不良的生活习惯。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、课堂讨论、课堂练习，启发式与提问式相结合等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">传统板书与多媒体课件辅助教学相结合.</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">习题 1-1　第 1 题的（1），第 2 题。</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1]陈希孺.概率论与数理统计.北京:科学出版社.2002.
[2]李贤平.概率论基础.3 版.北京:高等教育出版社.2010.
[3] 盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计.北京:高等教育出版.2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程

一、导入

“期望”在我们日常生活中常指有根据的希望，在概率论中，它源于历史上一个著名的分赌本问题：

例 2.2.1（分赌本问题） 17 世纪中叶，一位赌徒向法国数学家帕斯卡（1623-1662）提出一个使他苦恼很久的分赌本问题：甲、乙两赌徒赌技相同，各出赌注 50 法郎，每局中无平局. 他们约定，谁先赢三局则得到全部 100 法郎的赌本. 当甲赢了两局，乙赢了一局时，因故要中止赌博，现问这 100 法郎如何分才算公平？

（让学生进行讨论）

（让学生一定要远离赌博，养成良好的生活习惯）

二、讲解

帕斯卡给出了一下的分配方案：

对于甲来说，可能出现的情况如下：

（甲赢 甲赢）（甲赢 乙赢）（乙赢 甲赢）（乙赢 乙赢）

设甲赢得的赌本为 X，则 X 的分布为

X	0	100
p	0.25	0.75

所以甲分得的赌本为

$$x_1p_1+x_2p_2=0\times0.25+100\times0.75=75 \quad（元）$$

乙分得的赌本为 25 元.

定义 2.2.1 对于离散的随机变量

$$P(X=x_i)=p_i=p(x_i) \quad (i=1,2,\cdots)$$

如果

$$\sum_{i=1}^{+\infty}|x_i|p(x_i)<+\infty$$

那么称

教学流程	

$$E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty}x_i p(x_i)$$

为随机变量 X 的数学期望(mathematical expectation).或该分布的数学期望，简称期望或均值.

若级数$\sum_{i=1}^{+\infty}|x_i|p(x_i)$不收敛,则称 X 的期望不存在.

定义 2.2.2 设随机变量 X 的密度函数为$p_X(x)$.

如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,p_X(x)dx<+\infty$$

那么称

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x)dx$$

为随机变量 X 的数学期望.或该分布的数学期望，简称期望或均值.否则称 X 的期望不存在.

期望是均值，也可以理解为重心。

例 2.2.2 在一个人数为 N 的人群中普查某种疾病，为此要抽验 N 个人的血。如果将每个人的血分别检验，则共需检验 N 次，为了能减少工作量，一位统计学家提出一种方法：按 k 个人一组进行分组，把同组人的血样混合后检验，如果这种混合血样呈现阴性反应，说明这 k 个人只需要检验一次就够了；如果这种混合血样呈现阳性反应，说明这 k 个人中至少有一个人的血呈现阳性反应，则再对此 k 个分别进行检验.假设该疾病的的发病率为 p，且每人是否得此疾病相互独立.试问这种方法能否实现减少平均检验次数?

解： 令 X=“该人群中每个人需要验血的次数”，则 X 的分布列为

X	$1/k$	$1+1/k$
P	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

适当选择 K 可以保证

$$E(X)=\frac{1}{k}(1-p)^k+(1+\frac{1}{k})[1-(1-p)^k]$$

教学流程	$=\frac{1}{k}(1-p)^k+1-(1-p)^k+\frac{1}{k}-\frac{1}{k}(1-p)^k$ $=1-(1-p)^k+\frac{1}{k}$. 由此可知，只要适当选择 k，就可减少验血次数，而且可适当选择 k 使验血次数达到最小．如当 p=0.1 时，有

k	2	3	4	5	8	10	30	33	34
$E(X)$	0.690	0.604	0.594	0.610	0.695	0.751	0.991	0.994	1.0016

（结合当前的疫情,讲解我国以人为本的清零政策.培养学生的爱国主义精神,培养学生作为中国人的自豪感。）

例 2.2.3 每张彩票售价 5 元，出售 100 万张，摇奖摇 6 个号码，开奖规则如下：

（1）最后一位相同者获得六等奖，奖金 10 元。

（2）最后两位相同者获得五等奖，奖金 50 元。

（3）最后三位相同者获得四等奖，奖金 500 元。

（4）最后四位相同者获得三等奖，奖金 5000 元。

（5）最后五位相同者获得二等奖，奖金 50000 元。

（6）最后六位相同者获得一等奖，奖金 500000 元。

解：设 X 为中奖金额，则 X 的分布如下：

X	500000	50000	5000	500	50	10	0
p	0.000001	0.000009	0.00009	0.0009	0.009	0.09	0.9

彩票机构的收益为 $500-320=180$(万元)

（结合例题的解释,让学生明白彩票的中奖率是很低的，偶而买几注可以,不能异想天开.做事情还得脚踏实地,一步一个脚印去做,才能取得成功.）

教学流程

例 2.2.4 设 $X \sim U(a,b)$， 求 $E(X)$

解： $p(x)=\begin{cases} 1/b-a & a<x<b, \\ 0 & 其他. \end{cases}$

$$E(X)=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}.$$

2.2.3 数学期望的性质

例 2.2.6 已知随机变量的分布列如下：

X	-2	-1	0	1	2
p	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

求 $Y=X+2$，$Z=X^2$ 的分布.

解：

$Y=X+2$	0	1	2	3	4
p	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

$Z=X^2$	4	1	0	1	4
p	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

合并为

$Z=X^2$	0	1	4
p	0.1	0.4	0.5

在计算相关问题的时候，注意

x_i与$g(x_i)$ 对应的点概率质量均为 $p(x_i)$

x与$g(x)$ 对应的点概率质量均为 $p(x)dx$

所以函数的数学期望定义为：

性质 2.2.1 若 c 是常数，则 $E(c)=c.$

性质 2.2.2 若 a 是常数，则 $E(aX+b)=aE(X)+b.$

性质 2.2.3

$$E[g_1(X)\pm g_2(X)]=E[g_1(X)]\pm g_2[(X)]$$

教学流程

例 2.2.5 一民航客车载有 20 位旅客自机场开出旅客有 10 车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车. 以 X 表示停车的次数，求该客车的平均停车次数.（假设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立）.

解 令 X_i=“第 i 个车站停车的次数”i=1,2,则

$$X_i \sim b(1,1-0.9^{20}),\ X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{10})$$

$$= (1-0.9^{20}) + (1-0.9^{20}) + \cdots + (1-0.9^{20})$$

$$= 10(1-0.9^{20}) + (1-0.9^{20}) + \cdots + (1-0.9^{20}) = 8.784.$$

定理 2.2.1 若随机变量 X 的分布用分布列 $P(x_i)$ 或用密度函数 $p(x)$ 表示，则 X 的某一函数 $g(X)$ 的数学期望为

$$E\left[g(X)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} g(x_i)p(x_i), \text{在离散场合；} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx, \text{在连续场合.} \end{cases}$$

定理的重要性在于，求 $E(Y)$ 时不必算出 Y 的概率分布了.

例 2.2.6 已知随机变量的分布列如下：

X	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

求 Y=X^2 的数学期望.

解： Y=X^2 的分布列为

X	-2	-1	0	1	2
$Y=X^2$	4	1	0	1	4
P	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

例 2.2.7 某公司经销某种原料，历史资料表明：该原料的市场需求量 X(单位:吨)服从(300,500)上的均匀分布. 每出售一顿该原料，公司可获利润 1.5(万元)；若积压 1 吨，则公司损失 0.5(万元). 问公司应该组织多少货源，

教学流程	可使平均收益最大？ 解：设组织货源为 a 吨，则获利为 即 $g(X)=\begin{cases}1.5a, & 若X\ge a,\\ 2X-0.5a & 若X<a.\end{cases}$ 则平均利润为 $E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)dx$ $=\int_{300}^{a}(2x-0.5a)\cdot\frac{1}{200}dx+\int_{a}^{500}1.5a\cdot\frac{1}{200}dx$ $=\frac{1}{200}(-a^2+900a-300^2)$ 故当 $a=450$ 吨时，平均收益 $E(X)$ 最大。
教学后记	

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第二章 随机变量及其分布</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>2.3 随机变量的方差与标准差</td><td>时间</td><td colspan="2">2021 年 月 日 7、8 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">了解引入随机变量的方差与标准差的原因；掌握随机变量的方差与标准差的定义及计算方法；掌握随机变量方差的性质；掌握切比雪夫不等式。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">在讲随机变量方差的含义时，对学生进行思政教育，让学生向自己的人生目标前进，不要被眼前的小利益所迷惑，一定要保持定力。
结合投资的例题,对学生进行思政教育，在定目标时,一定在符合实际,不能好高骛远.既要目标的远大,又要考虑实现的可能性。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">教学重点：随机变量方差与标准差的计算及性质。
教学难点：切比雪夫不等式的证明。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">1.了解引入随机变量的方差与标准差的原因；
2.掌握随机变量的方差与标准差的定义及计算方法；
3.掌握随机变量方差的性质；
4.掌握切比雪夫不等式。
5.对学生进行思政教育，让学生向自己的人生目标前进，不要被眼前的小利益所迷惑，一定要保持定力.</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、课堂讨论、课堂练习，启发式与提问式相结合等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">传统板书与多媒体课件辅助教学相结合.</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">习题 2-3 第 3、5、14、18、20 题。</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1]陈希孺.概率论与数理统计.北京:科学出版社.2002.
[2]李贤平.概率论基础.3 版.北京:高等教育出版社.2010.
[3] 盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计.北京:高等教育出版.2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程

一、导入

随机变量X的数学期望$E(X)$是一种位置特征数，它刻画了X的取值在$E(X)$周围波动，但这个位置特征数无法反映出X取值的“波动”大小. 譬如，已知X与Y的分布列分别为

X	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

Y	-100	0	100
P	1/3	1/3	1/3

则$E(X)=E(Y)=0$，但Y的取值波动要比X的取值波动大.

方差与标准差正是度量此种波动大小的两个特征数.

（结合方差的实际应用，特别是表示波动、风险时，对学生进行思政教育，让学生向自己的人生目标前进，不要被眼前的小利益所迷惑，一定要保持定力.）

二、讲解

随机变量的数学期望是对随机变量取值水平的综合评价，而随机变量取值的稳定性是判断随机现象性质的另一个十分重要的指标.

如：甲、乙两人射击，X：甲击中的环数；Y：乙击中的环数；

与平均环数的偏离程度不同 在实际问题中常关心随机变量与均值的偏离程度，可用$E\{|X-E(X)|\}$表示，但不方便；所以通常用$E\{[X-E(X)]^2\}$来度量随机变量X与其均值$E(X)$的偏离程度。

一、 方差的定义

1 定义 1 设X是一个随机变量，若$E[(X-E(X)]^2$存在，则称它为X的方差，记为$D(X)=E[X-E(X)]^2$.

方差的算术平方根$\sqrt{D(X)}$称为标准差或均方差，它与X具有相同的度量单位，在实际应用中经常使用.

2 方差刻划了随机变量X的取值与数学期望的偏离程度，它的大小

教学流程	可以衡量随机变量取值的稳定性. 从方差的定义易见: (1)若 X 的取值比较集中,则方差较小; (2)若 X 的取值比较分散,则方差较大; **二、 方差的计算** 1 若 X 是离散型随机变量,且其概率分布为 $P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\cdots$ 则 $D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2 p_i$; 2 若 X 是连续型随机变量,且其概率密度为 $f(x)$, 则 $D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$. 3 方差的简化公式: $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$. 证明: $Var(X)=E[X-E(X)]^2$ $=E[X^2-2XE(X)+E^2(X)]=E(X^2)-2E(X)\cdot E(X)+E^2(X)$ $=E(X^2)-E^2(X)$ 4 设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2\neq 0$. 称 $X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 为 X 的标准化变量. 即 $X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的数学期望为 0, 方差为 1. 例 2.3.2 某人有一笔资金，可投入房地产和商业，其收益都与市场状态有关. 若把未来市场分为好、中、差三个等级，其发生的概率分别为 0.2, 0.7, 0.1. 通过调查该投资者认为投资于房地产的收益 X (万元) 和投资于商业的收益 Y (万元) 的分布分别为 <table><tr><td>X</td><td>11</td><td>3</td><td>-3</td></tr><tr><td>p</td><td>0.2</td><td>0.7</td><td>0.1</td></tr></table> <table><tr><td>Y</td><td>6</td><td>4</td><td>-1</td></tr><tr><td>p</td><td>0.2</td><td>0.7</td><td>0.1</td></tr></table>

教学流程	试问：如何投资较好？ **解**：我们先考察数学期望（单位：元） $$E(X)=11\times 0.2+3\times 0.7+(-3)\times 0.1=4.0，$$ $$E(Y)=6\times 0.2+4\times 0.7+(-1)\times 0.1=3.9.$$ 从平均收益看，投资房地产收益大，可比投资商业多收益 0.1 万元.下面我们再来计算它们各自的方差 $$Var(X)=(11-4)^2\times 0.2+(3-4)^2\times 0.7+(-3-4)^2\times 0.1=15.4$$ $$Var(Y)=(6-3.9)^2\times 0.2+(4-3.9)^2\times 0.7+(-1-3.9)^2\times 0.1=3.29$$ 标准差 $$\sigma(X)=\sqrt{15.4}=3.92，\sigma(Y)=\sqrt{3.29}=1.81.$$ 两项目平均收益相差不大，但房地产的标准差大，故风险大，商业的标准差小风险相对较小，故投资商业项目更好. （在定目标时,一定在符合实际,不能好高骛远.既要目标的远大,又要考虑实现的可能性） **三、方差的性质** 1. 设 C 常数，则 $D(C)=0$； **证明**：$Var(c)=E[c-E(c)]^2=E(c-c)^2=0.$ 2. 若 X 是随机变量，若 C 是常数，则 $D(aX+b)=a^2D(X)$; **证明**：$D(aX+b)=E[(aX+b)-E(aX+b)]^2$ $=E\left[a\left(X-E(X)\right)\right]^2=a^2E[X-E(X)]^2=a^2D(X).$ **例 1**:设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立,且都服从参数为 λ 的指数分布,而 Y 是 X_1,X_2,X_3 的算术平均值,求 $E(Y^2)$. **解**:因 $X_i\sim\pi(\lambda),i=1,2,3$，故 $E(X_i)=\lambda,D(X_i)=\lambda$

教学流程

所以 $E(Y)=E\left(\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\left[E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)\right]=\lambda$

例 2 设活塞的直径（以 cm 计）$X\sim N(22.40,0.03^2)$，气缸的直径 $Y\sim N(22.50,0.04^2)$，X,Y 相互独立，任取一只活塞，任取一只气缸，求活塞能装入气缸的概率.

解 按题意需求 $P\{X<Y\}=P\{X-Y<0\}$.

由于 $X-Y\sim N(-0.10,\ 0.0025)$,

故有

练习 1：设连续型随机变量 X 的密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x\in[0,\ 1],\\ 0, & x\notin[0,\ 1].\end{cases}$$

求 $D(X)$.

解：$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-\left[\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx\right]^2$

2：设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(0,1)$．求 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度

解：由 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(0,1)$，且 X 和 Y 相互独立

知 $Z=2X-Y+3$ 服从正态分布，且 $E(Z)=2E(X)-E(Y)+3=5$.

$D(Z)=4D(X)+D(Y)=9$ 故，$Z\sim N(5,9)$

Z 的概率密度为 $f_Z(z)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$，$-\infty<z<\infty$

3：设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，求 $E(X+e^{-2X})$

解：X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & (x\ge 0)\\ 0, & (x<0)\end{cases}$ $E(X)=1$

所以 $E(X+e^{-2X})=E(X)+E(e^{-2X})$

教学流程	又 $E(e^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2X}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}e^{-3x}dx=\frac{1}{3}$ 所以 $E(X+e^{-2X})=\frac{4}{3}$ **2.3.3 切比雪夫不等式** **定理 2.3.1** 设随机变量 X 的期望与方差都存在，则 $$P(\lvert X-E(X)\geq\varepsilon\rvert)\leq\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$ **证明：** 设 X 是连续的随机变量，$p(x)$ 为密度函数. 记 $E(X)=a$，则 $$P(\lvert X-\mu\rvert\geq\varepsilon)=\int_{\lvert x-\mu\rvert\geq\varepsilon}p(x)dx$$ $$\because\ \frac{(x-\mu)^2}{\varepsilon^2}\geq 1$$ $$\leq\int_{\lvert x-\mu\rvert\geq\varepsilon}\frac{(x-\mu)^2}{\varepsilon^2}p(x)dx\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2p(x)dx\leq\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}.$$ 在概率论中，事件 $\{\lvert X-E(X)\rvert\geq\varepsilon\}$ 称为大偏差，切比雪夫不等式给出了大偏差发生概率的上界，这个上界与方差成正比，方差越大上界也越大. **定理 2.3.2** 设随机变量 X 的方差存在，则 $Var(X)=0$ 的充要条件为 X 几乎处处等于常数 a，即 $P(X=a)=1$. **证明：** 充分性显然，下证明必要性，设 $Var(X)=0$， 这时 $E(X)$ 存在，由于 $$\{\lvert X-E(X)\rvert>0\}=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{\lvert X-E(X)\rvert\geq\frac{1}{n}\}$$ 于是 $$P\{\lvert X-E(X)\rvert>0\}=P(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{\lvert X-E(X)\rvert\geq\frac{1}{n}\})$$

<table>
<tr><td>教
学
流
程</td><td>

$$\le \sum_{n=1}^{+\infty} P(|X - E(X)| \ge \frac{1}{n})$$

$$\le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{D(X)}{(1/n)^2} = 0.$$

则 $P\{|X - E(X)| = 0\} = 1$，即 $P(X = E(X)) = 1$.

取 $a = E(X)$，必要性得证.

因 $E(X) = C$，性质5说明，当方差为零时，随机变量以概率1集中在数学期望这一点上，即方差等于零的随机变量与以概率1等于常数的随机变量是一样的．它进一步说明方差是度量随机变量与它的数学期望的偏离程度的指标.

</td></tr>
<tr><td>教　学
后　记</td><td></td></tr>
</table>

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第二章 随机变量及其分布</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>2.4 常用离散分布</td><td>时间</td><td colspan="2">2021 年 月　日 7、8 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">掌握 0-1 分布、二项分布、泊松分布、几何分布、超几何分布、负二项分布的分布列及数学期望与方差；会应用以上分布处理现实的问题。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">结合例子做思政教育：做人事情都应该脚踏实地，不能偷奸耍滑，那样是很难成功的。即使成功了，也很容易再衰败</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">教学重点：掌握 0-1 分布、二项分布、泊松分布、几何分布、超几何分布、负二项分布的分布列及数学期望与方差。
教学难点：以上分布的数学期望与方差的计算。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">1.掌握 0-1 分布、二项分布、泊松分布、几何分布、超几何分布、负二项分布的分布列；
2.掌握以上分布的数学期望与方差；
3.会应用以上分布处理现实的问题。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、课堂讨论、课堂练习，启发式与提问式相结合等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">传统板书与多媒体课件辅助教学相结合.</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">习题 2-4　第 3、5、15、20 题。</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1]陈希孺.概率论与数理统计.北京:科学出版社.2002.
[2]李贤平.概率论基础.3 版.北京:高等教育出版社.2010.
[3] 盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计.北京:高等教育出版.2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程

一、导入

1 0-1 分布或两点分布 或 伯努利分布.

如果随机变量X的分布律为$P\left\{X=0\right\}=1-p$，$P\left\{X=1\right\}=p$

或$P\left\{X=k\right\}=p^k\left(1-p\right)^{n-k} \quad \left(k=0,1,0<p<1\right)$

则称随机变量 X 服从参数为p的 0-1 分布或两点分布

或

X	0	1
P	1-p	p

2.二项分布

如果随机变量X的分布律为

$P\left\{X=k\right\}=C_n^k p^k\left(1-p\right)^{n-k} \quad \left(k=0，1，\cdots，n\right)$

则称随机变量X服从参数为$\left(n，p\right)$的二项分布，记作$X \sim b\left(n，p\right)$

注：(1) $P\{X=k\}\geq 0,k=0,1,2\cdots n$.

(2) $\sum_{k=0}^{n} P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty} C_n^k p^k\left(1-p\right)^{n-k}=(p+1-p)^n=1$

显然，当$n=1$时$X \sim b\left(1，p\right)$

说明，贝努里分布是二项分布的一个特例.

例2 射手射击一枪命中的概率是$\frac{3}{4}$，求射手射击6枪中恰好命中$k(k=0,1,2\cdots 6)$枪的概率.

解:我们将射手射击一枪看成一次试验，独立射击6枪相当于做6重伯努利

试验．记X为陆次射击命中的次数，则X是一个随机变量，且

$$X \sim b(6,\frac{3}{4})$$

因此$P_6(k)=P\left\{X=k\right\}=C_6^k(\frac{3}{4})^k(\frac{1}{4})^{6-k} \quad \left(k=0，1，\cdots，6\right)$

例3 某人进行射击，每次射击的命中率为，独立射击5000次，求命中一次以上的概率.

解：将一次射击看成一次试验，设击中的次数为X，则

教学流程	$X \sim b(5000, 0.001)$ X 的概率分布为 于是所求概率 **例**　一张考卷上有 5 道选择题，每道题列出 4 个可能答案，其中只有一个答案是正确的．某学生靠猜测至少能答对 4 道题的概率是多少？ **解：**每答一道题相当于做一次贝努利试验， $A=\{答对一道题\}$，则　$P(A)=\frac{1}{4}$， 则答 5 道题相当于做 5 重贝努里试验． 设 X 表示学生靠猜测能答对的题数,则 $X \sim b\left(5,\ \frac{1}{4}\right)$. （对学生进行思政教育：做人事情都应该脚踏实地，不能偷奸耍滑，那样是很难成功的。即使成功了，也很容易再衰败） **3 泊松分布：** 如果随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (\lambda>0, k=0,1,2,\cdots)$ 则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布记为$X \sim \pi(\lambda)$ 注：(1)　$P\{X=k\} \geq 0, k=0,1,2\cdots$ (2)　$\sum_{k=0}^{\infty} P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$ 泊松分布的应用 (1)泊松分布是概率论中最重要的几个分布之一．实际问题中许多随机现象都服从或近似服从泊松分布．泊松分布是概率论中重要的分布之一． (2) 自然界及工程技术中的许多随机指标都服从泊松分布． (3) 例如，可以证明，电话总机在某一时间间隔内收到的呼叫次数，放射物在某一时间间隔内发射的粒子数，容器在某一时间间隔

教学流程	内产生的细菌数，某一时间间隔内来到某服务台要求服务的人数，等等，在一定条件下，都是服从泊松分布的. **例 4:** 某一城市每天发生火灾的次数 X 服从参数 $\lambda=0.8$ 的泊松分布，求该城市一天内发生 3 次或 3 次以上火灾的概率. **解**：由概率的性质，得 **4 二项分布的泊松近似** **定理 1（泊松定理）** 在 n 重伯努利试验中，事件 A 在每次试验中发生的概率为 p_n（注意这与试验的次数 n 有关），如果 $n\to\infty$ 时，$np_n\to\lambda$（$\lambda>0$ 为常数），则对任意给定的 k，有 $$\lim_{n\to\infty} b(k,n,p_n)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$ **证**：令：$np_n=\lambda_n$ ，对于固定的 k，有 所以 $$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k\left(1-p_n\right)^{n-k} =\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$ **泊松定理的应用** 当 $n\ge 20, p\le 0.05$ 时近似效果颇佳，当 $n\ge 100, np\le 0.05$ 时近似效果更好， **例5** 为保证设备正常工作，需要配备一些维修工，如果各台设备发生故障 是相互独立的，且每台设备发生故障的概率都是. 试在以下各情况下，求设备发生故障而不能及时维修的概率. （1）一名维修工负责贰拾台设备； （2）3名维修工负责90台设备. **解:**（1）以X表示20台设备中同时发生故障的台数，则 $X\sim b(20,0.01)$ 以 $\lambda=np=20\times 0.01=0.2$ 为参数的泊松分布作近似计算， 得 $P\{X>1\}=1-P\{X\le 1\}\approx 1-\sum_{k=0}^{1}\frac{0.2^k e^{-0.2}}{k1}=0.0175$

教学流程	（2）以Y表示90台设备中同时发生故障的台数，则 $Y \sim b(90, 0.01)$．以参 数$\lambda = np = 90 \times 0.01 = 0.9$的泊松分布作近似计算，得所求概率为 **练习1** 设随机变量 X 服从参数为λ的Poisson分布，且已知 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$ 试求 $P\{X=4\}$ **解：** 随机变量 X 的分布律为 $$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0，1，2，\cdots)$$ 由已知$P\{X=1\}=P\{X=2\}$ 得$\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$ ，$\lambda=2$ 所以$P\{X=4\}=\frac{2^4}{4!}e^{-2} = \frac{2}{3}e^{-2}$ **练习2** 为了保证设备正常工作，需配备适量的维修工人，现有同类型设备 300 台各台工作是相互独立的,发生故障的概率都是 .在通常情况下，一台设备的故障可有一人来处理. 问至少需配备多少工人，才能保证当设备发生故障但不能及时维修的概率小于 **解：**设需配备 N 人，记同一时刻发生故障的设备台数为 X， **则** *X*～*b*(*300*,)，需要确定最小的 N 的取值，使得： $$P\{X > N\} \le 0.01$$ 查表可知，满足上式的最小的 N 是 8，因此至少需配备 8 个工人。 **练习3** 设有 80 台同类型的设备，各台工作是相互独立的，发生故障的概率都是 ，且一台设备的故障能由一个人处理.考虑两种配备维修工人的方法： 其一，由 4 人维护，每人负责 20 台 其二，由 3 人,共同维护 80 台. 试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率的大小.

教学流程	**解**：按第一种方法. 以 X 记 “第 1 人负责的 20 台中同一时刻发生故障的台数”，则 $X\sim B(20,)$. 以 A_i 表示事件“第 i 人负责的台中发生故障不能及时维修”，则 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为： 按第二种方法. 以 Y 记 80 台中同一时刻发生故障的台数， 则 $Y\sim B(80,)$. 故 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为： 第二种方法中发生故障而不能及时维修的概率小，且维修工人减少一人。运用概率论讨论国民经济问题，可以有效地使用人力、物力资源。 **其他的分布** 2.4.3 超几何分布 设有 N 件产品，其中 M 个次品，不放回抽取 n 件，求有 k 件次品的概率. 2.4.4 几何分布与负二项分布 几何分布 某射击运动员,每枪击中的概率为 p,求第 k 枪首次击中的概率. 解：设 X 表示首次击中 $$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p.$$ 负二项分布 某射击运动员，每枪击中的概率为 p,求第 r 枪击中的时，总共射击了 k 发子弹的概率. 例：第 3 枪击中的时候，共射出了 4 发子弹的概率 1　2　3　4 ×　√　√　√ √　×　√　√ √　√　×　√ 第 r 枪击中的时，总共射击了 k 发子弹的概率.

教 学 流 程	**解：** 设 X 表示第 r 枪击中的时，总共射击了 k 发子弹. $$P\{X=k\}=C_{k-1}^{r-1}(1-p)^{k-r}p^{r}.$$
教　学 后　记	

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第二章 随机变量及其分布</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>2.5 常用连续分布（1）</td><td>时间</td><td colspan="2">2021 年 月 日 7、8 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">掌握正态分布的密度函数；掌握正态分布的数学期望和方差；会对一般正态分布进行标准化；会应用正态分布分布处理现实的问题。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">对高斯进行简介，培养学生的理想主义精神，使学生树立远大的目标，并持之不移地向目标奋斗。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">教学重点：正态分布的密度函数、期望和方差、正态分布的标准化。
教学难点：正态分布各个性质的推导。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">1. 掌握正态分布的密度函数；
2. 掌握正态分布的数学期望和方差；
3. 会对一般正态分布进行标准化；
4. 会应用正态分布处理现实的问题。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、课堂讨论、课堂练习，启发式与提问式相结合等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">传统板书与多媒体课件辅助教学相结合.</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">习题 1-1　第 1 题的（1），第 2 题。</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1]陈希孺. 概率论与数理统计. 北京:科学出版社. 2002.
[2]李贤平. 概率论基础. 3 版. 北京:高等教育出版社. 2010.
[3] 盛骤,谢式千,潘承毅. 概率论与数理统计. 北京:高等教育出版. 2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程

一、导入

正态分布是概率论中最重要的连续型分布，在十九世纪前叶由高斯加以推广，故又常称为高斯分布.

（对高斯进行简介，培养学生的理想主义精神，使学生树立远大的目标，并持之不移地向目标奋斗）

一般来说，一个随机变量如果受到许多随机因素的影响，而其中每一个因素都不起主导作用（作用微小），则它服从正态分布. 这是正态分布在实践中得以广泛应用的原因. 例如，产品的质量指标，元件的尺寸，某地区成年男子的身高、体重，测量误差，射击目标的水平或垂直偏差，信号噪声、农作物的产量等等，都服从或近似服从正态分布.

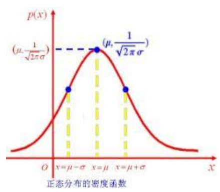
1）定义　若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty.$$

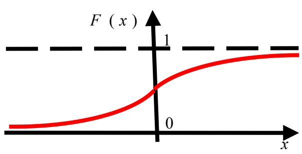
其中 μ 和 $\sigma(\sigma>0)$ 都是常数，则称 X 服从参数为 μ 和 σ^2 的**正态分布**.

记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

2)正态分布密度函数的图形性质：



3）正态分布的分布函数：



4、标准正态分布

教学流程	**定义 5** 正态分布当 $\mu=0,\sigma=1$ 时称为标准正态分布，此时，其密度函数和分布函数常用 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示： $$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},x\in R;\ \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\ t\in R$$ 标准正态分布的重要性在于，任何一个一般的正态分布都可以通过线性变换转化为标准正态分布. **5、定理** 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$. **证：** $F(y)=P\{Y\le y\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le y\}\ =P\{X\le\mu+\sigma y\}$ **6 定理：** 如果 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，分布函数 $F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$**，**对任意区间 $[a,b]$ 有 $P(a\le X\le b)=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$ **7、标准正态分布表的使用：** （1）表中给出了 $x>0$ 时 $\Phi(x)$ 的数值，当 $x<0$ 时，利用正态分布的对称性, 有 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$; （2） 若 $X\sim N(0,1)$, 则 $P\{a<X\le b\}=\Phi(b)-\Phi(a)$; （3）若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$, 故 X 的分布函数 **例 4** 设 $X\sim N(1,4)$，求 $(1).P\{0\le X<1.6\},(2)P\{\|X-1\|\le 2\}$ $(3)P\{X\ge 2.3\}$ **解** 这里 $\mu=1,\ \sigma=2$，故 **例 5** 设 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$ **求** $P\{\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma\}$， $k=1,2,3$ 解： $P\{\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma\}=P\{-k<\frac{X-\mu}{\sigma}<k\}$ $=\Phi(k)-\Phi(-k)=2\Phi(k)-1$

教学流程	则有 $P\{\lvert X-\mu\rvert \ge 3\sigma\}=1-P\{\lvert X-\mu\rvert<3\sigma\}=0.0026<0.003$ X 的取值几乎都落入以为中心，以 3 为半径的区间内。称为3σ准则 **例6** 公共汽车门的高度是按男子与车门顶碰头的机会在以下设计的，设男子身高X（单位：cm）服从正态分布$N(170,6^2)$，问车门高度为多少? **解:**设公共汽车门的高度为$h\ cm$，由题设要求$P\{X>h\}<0.01$．而 $P\{X>h\}=1-P\{X\le h\}=1-$即$\Phi\left(\dfrac{h-170}{6}\right)>0.99$. 查附表3得$\Phi(2.33)=0.9902>0.99$．故$\dfrac{h=170}{6}>2.33$, 则$h>183.98$ 故车门的高度超过$183.98cm$时，男子与车门碰头的机会小于 **练习 1** 设某项竞赛成绩$X\sim N(65,100)$，若按参赛人数的 10%发奖，问获奖分数线应定为多少 **解** 设获奖分数线为x_0，则求使$P\{X\ge x_0\}=0.1$成立的x_0. 即$\Phi\left(\dfrac{x_0-65}{10}\right)=0.9$，查表得$\dfrac{x_0-65}{10}=1.29$，解得$x_0=77.9$, 故分数线可定为 78 分. **练习 2** 将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器 内，调节器整定在d℃，液体的温度X（以℃计）是一个随机变量，且 $X\sim N(d,0.5^2)$ (1) 若 $d=90$ ℃，求X小于 89℃ 的概率； (2) 若要求保持液体的温度至少为 80℃的概率不低于，问d至少为多少 **解** (1) 所求概率为 (2) 按题意需求d满足 即$\Phi\left(\dfrac{80-d}{0.5}\right)\le 1-0.99=1-\Phi(2.325)=\Phi(-2.325)$, 亦即$\dfrac{80-d}{0.5}\le -2.325$, 故需$d\ge 81.1635$. **8、标准正态分布的数学期望与方差：**

教学流程	若 $X\sim N(0,1)$，求 $E(X),Var(X)$. $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$ $Var(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2p(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ $=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(-x)(e^{-\frac{x^2}{2}})'dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-xe^{-\frac{x^2}{2}})\Big\|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ $=1$ 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $E(X),Var(X)$. $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$ $\xlongequal{\frac{x-\mu}{\sigma}=y}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma y+\mu)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2}}\cdot\sigma dy$ $=\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}\mu\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\mu$ $Var(X)=E[X-E(X)]^2$ $\xlongequal{\frac{x-\mu}{\sigma}=y}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma y)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2}}\cdot\sigma dy \qquad =\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$ $\xlongequal{\frac{y^2}{2}=t}2\sigma^2\int_0^{+\infty}2t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t}\cdot\frac{1}{2}(2t)^{-\frac{1}{2}}2dt=\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ $=2\sigma^2\int_0^{+\infty}y^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ $=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma^2\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\sigma^2$
教 学 后 记	

章节（单元）教案

<table>
<tr><th>要　素</th><th colspan="4">内　容</th></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第二章 随机变量及其分布</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>2.5 常用连续分布（2）</td><td>时间</td><td colspan="2">2021 年 月 日 7、8 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">掌握指数分布、平均分布的密度函数；掌握指数分布、平均分布的数学期望和方差；会应用以上分布处理现实的问题。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">对学生进行思政教育:很多现实中的现象都有不同的表现形式，不能被事物的表面形象迷惑，要透过现象看本质。要对现象从不同的角度去看、去分析，不要被用心不良的观点带偏。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">教学重点：指数分布、平均分布的密度函数，数学期望和方差；
教学难点：指数分布数学期望和方差的推导。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">1.掌握平均分布的密度函数；
2.掌握指数分布、平均分布的数学期望和方差；
3.会应用以上分布处理现实的问题。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、课堂讨论、课堂练习，启发式与提问式相结合等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">传统板书与多媒体课件辅助教学相结合.</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">习题 1-1　第 1 题的（1），第 2 题。</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1]陈希孺.概率论与数理统计.北京:科学出版社.2002.
[2]李贤平.概率论基础.3 版.北京:高等教育出版社.2010.
[3] 盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计.北京:高等教育出版.2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程

1. 指数分布

（1）定义 若随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\quad \lambda>0\text{，}$$

则称X服从参数为λ的指数分布. 简记为$X\sim e(\lambda)$.

（2）指数分布的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0\ , & x\le 0.\end{cases}$$

（3）指数分布的概率密度及分布函数分别如图所示

例 3 某元件的寿命X服从指数分布，已知其参数$\lambda=\dfrac{1}{1000}$，求 3 个这样的元件使用 1000 小时，至少已有一个损坏的概率.

解 由题设知，X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{1000}}, & x\ge 0.\\ 0, & x<0\end{cases}$

由此得到 $P\{X>1000\}=1-P\{X\le 1000\}=1-F(1000)=e^{-1}.$

各元件的寿命是否超过 1000 小时是独立的，用Y表示三个元件中使用 1000 小时损坏的元件数，则$Y\sim b(3,1-e^{-1})$.

所求概率为$P\{X>1000\}=1-\mathrm{e}^{-3}$.

例2.5.6 如果某设备在任何长为t的时间[0,t]内发生故障的次数N(t)服从参数为t的泊松分布，则相继两次故障之间的时间间隔T服从参数为λ的指数分布.

解 因为$N(t)\sim P(\lambda t)$，所以

$$P\big(N(t)=k\big)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ k=0,1,2,\cdots$$

⑴当$t\le 0$时，有$F_T(t)=P(T\le t)=0$.

⑵当$t>0$时，有

教学流程	$$F_T(t)=P(T\le t)=1-P(T>t)=1-P(N(t)=0)=1-e^{-\lambda t}.$$ 于是$T\sim Exp(t)$. **2. 均匀分布** （1）定义　若连续型随机变量X的概率密度为 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ 则称X在区间(a,b)上服从均匀分布，$X\sim U(a,b)$. **（2）均匀分布的分布函数** 若随机变量X服从在[a,b]上的均匀分布， 则分布函数为$F\left(x\right)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & b<x\end{cases}$ **（3）均匀分布的数学期望与方差** $$E(X)=\frac{a+b}{2}.$$ $$Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$ **例2** 已知乘客在某公共汽车站等车的时间X(min)服从区间(0, 10)上的均匀分布，求乘客等车时间不超过5(min)的概率. **解：**　由于$X\sim U(0,10)$，所以X的概率密度为 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}, & 0<x<10\\ 0, & 其它\end{cases}$$ 故等车时间不超过5(min)的概率为 $$P\left\{X\le 5\right\}=\int_{-\infty}^{5}f(x)dx=\int_0^5\frac{1}{10}dx=0.5$$ 一维指数分布的实质是一维的几何概型。

	（思政教育：很多现实中的现象都有不同的表现形式，不能被事物的表面形象迷惑，要透过现象看本质。要对现象从不同的角度去看、去分析，不要被用心不良的观点带偏。）
教　学 后　记	

章节（单元）教案

要　素	内　容			
章节名称	第二章 随机变量函数及其分布		教学时数	2
单元内容	2.6 随机变量函数的分布	时间	2021 年 月 日 7、8 节	
教学目标	掌握离散型随机变量函数的分布律；掌握连续型随机变量函数的密度函数的常规做法；掌握严格单调的连续型随机变量函数的密度函数的公式。			
思政目标	在引入后，对学生进行思政教育。世界是联系的,不是孤立的，我们应该用联系的、动态的观念思考问题。比如你数学分析学的差，概率统计你也学不好。所以我们应该一开始就认真学习，为以后的学习和工作打下基础。			
重点难点	教学重点：连续型随机变量函数的密度函数的常规做法； 教学难点：连续型随机变量函数的密度函数的常规做法。			
教学要求	1. 掌握离散型随机变量函数的分布律； 2. 掌握连续型随机变量函数的密度函数的常规做法； 3. 掌握严格单调的连续型随机变量函数的密度函数的公式。			
教学方法	课堂讲授、课堂讨论、课堂练习，启发式与提问式相结合等			
授课方式	传统板书与多媒体课件辅助教学相结合.			
练　习 作　业	习题 1-6　第 5、15、20、22 题。			
参　考 资　料	[1]陈希孺.概率论与数理统计.北京:科学出版社.2002. [2]李贤平.概率论基础.3 版.北京:高等教育出版社.2010. [3] 盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计.北京:高等教育出版.2008.			

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程	**一、导入** **定义** 如果存在一个函数$g(X)$，使得随机变量X,Y满足：$Y=g(X)$，则称随机变量Y是随机变量X的函数．当X取值x时，Y取值$y=g\left(x\right)$. (世界是联系的,不是孤立的,我们应该用联系的、动态的观念思考问题。比如你数学分析学的差，概率统计你也学不好。所以我们应该一开始就认真学习，为以后的学习和工作打下基础) **注：** 由于X是随机变量，其取值事先不确定，因此Y的取值也不确定，也是随机变量．本节主要解决的问题是，已知随机变量X的分布，求其函数$Y=g(X)$的分布，这里$g(\cdot)$是已知的连续函数. 本节主要研究是随机变量函数的随机性特征，即由自变量X的统计规律性出发研究因变量Y的统计性规律. **注：** 随机变量Y与X的函数关系确定,为从X的分布出发导出Y的分布提供了可能. **二、X是离散型随机变量** **例 1:** 设随机变量X的概率分布为 $\begin{array}{c\|cccc} X & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline p_i & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.4 \end{array}$ 试求 $Y=(X-1)^2$ 的分布律. **解:** Y有可能取的值为$0,1,4$ $P\{Y=1\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.7,$, 所以, $Y=(X-1)^2$ 的分布律为： $\begin{array}{c\|ccc} Y & 0 & 1 & 4 \\ \hline p_i & 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{array}$ 求离散型随机变量函数的分布的一种方法：记Y的所有可能取值为$y_i,i=1,2,\cdots$对每个y_i来说至少有一个x_k，使$y_i=g(x_k)$成立，

教学流程

将所有满足

$y_i = g(x_k)$ 式子中的 x_k 对应的概率 p_k 求和，作为事件

$\{Y = y_i\}, i = 1,2,\cdots$ 的概率.

三、X 是连续型随机变量

设已知 X 的分布函数 $F_X(x)$ 或概率密度函数 $f_X(x)$，则随机变量函数 $Y = g(X)$ 的分布函数可按如下方法求得:

例 2 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，证明 X 的线性函数 $Y = aX + b$ $(a \neq 0)$ 也服从正态分布.

证 记 X,Y 的分布函数为 $F_X(x), F_Y(y)$

若 $a > 0$，

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{aX + b \le y\} = P\left\{X \le \frac{y-b}{a}\right\} = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

将 $F_Y(y)$ 对 y 求导, 得 $Y = aX + b$ 的概率密度为

又 X 的概率密度为 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty < x + \infty$.

所以

$$f_Y(y) = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a\sigma)}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}}, -\infty < y < +\infty$$

若 $a < 0$

对 y 求导, 得 $Y = aX + b$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = -f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{a} = -\frac{1}{a}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$= -\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(-a\sigma)}e^{\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma}e^{\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}}, -\infty < y < +\infty$$

故 $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$.

教学流程	即服从正态分布的随机变量的线性函数仍服从正态分布 特别上例中 $a=\dfrac{1}{\sigma},\ b=-\dfrac{\mu}{\sigma}$, 则得 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1).$ **例 3**：设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x),\ -\infty<x<\infty$, 求 $Y=X^2$ 的概率密度. **解**：分别记X,Y的分布函数为$F_X(x),F_Y(y)$, 先求Y的分布函数$F_Y(y)$. （1）先求 $Y=X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)$, 例如, 设 $X\sim N(0,1)$, 其概率密度为：$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty$ 则 $Y=X^2$ 的概率密度为：$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$ **定理 1** 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x),x\in(-\infty,+\infty)$，又设 $y=g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x)>0$（或恒有 $g'(x)<0$），则 $Y=g(X)$ 是一个连续型随机变量, 其概率密度为 $$f_Y(y)=\begin{cases}f[h(y)\,\vert\, h'(y)\vert, & \alpha<y<\beta\\ 0, & 其它\end{cases}$$ 其中：$x=h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的反函数，$\alpha=\min(g(-\infty),g(+\infty))$ 且 $\beta=\max(g(-\infty),g(+\infty)).$ **证明**：先考虑$g'(x)>0$的情况.此时$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$严格单调增加, 它的反函数$h(y)$存在且在(α,β)严格单调增加、可导. 分别记X,Y的分布函数为$F_X(x),F_Y(y)$ **例 4** 设随机变量 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，求 $Y=e^X$ 的概率密度函数. **解** 在区间（0，1）上，函数 $y=g(x)=e^x$ 的导数 $g'(x)=e^x>0$ 故 $g(x)$ 严格单调增加, 且 $g(x)$ 具有反函数 $x=h(y)=\ln y$.

<table>
<tr>
<td>教
学
流
程</td>
<td>

又 $h'(y)=\dfrac{1}{y}, g(0)=1, g(1)=e$

故 $Y=e^X$ 的概率密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases} f_X(\ln y)\cdot\left|\dfrac{1}{y}\right|, & 1<y<e, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

由已知 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，$f_X(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

代入 $f_Y(y)$ 的表达式中 $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y}, & 1<y<e, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

练习 1 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases} x/8, & 0<x<4 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，求 $Y=2X+8$ 的概率密度.

解：（1） 先求 $Y=2X+8$ 的分布函数 $F_Y(y)$：

整理得 $Y=2X+8$ 的概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{y-8}{32}, & 8<y<16, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

2 设随机变量 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，求 $Y=-2\ln X$ 的概率密度

解：在区间 $(0,1)$ 上，函数 $\ln x<0$，故 $Y=-2\ln X>0$

$y'=-\dfrac{2}{x}<0$, 于是 $Y=-2\ln X$ 在区间 $(0,1)$ 上单调下降，有反函数 $x=h(y)=e^{-y/2}$.

由前述定理，得 $f_Y(y)=\begin{cases} f_X(e^{-y/2})\left|\dfrac{d(e^{-y/2})}{dy}\right|, & 0<e^{-y/2}<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

已知 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，$f_X(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

</td>
</tr>
</table>

教 学 流 程	代入 $f_Y(y)$ 的表达式中 $f_Y(y)=\begin{cases} f_X(e^{-y/2})\left\|\dfrac{d(e^{-y/2})}{dy}\right\|, & 0<e^{-y/2}<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-y/2}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 即 Y 服从参数为 $\dfrac{1}{2}$ 的指数分布。
教　学 后　记	

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第二章 随机变量及其分布</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>2.7 分布的其他特征数</td><td>时间</td><td colspan="2">2021 年 月 日 7、8 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">掌握随机变量的 k 阶原点矩、k 阶中心矩、变异系数的概念，了解他们之间的关系，了解变异系数的含义；掌握随机变量偏度和峰度的定义，了解偏度和峰度的含义。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">在讲完变异系数后,对学生进行思政教育.有些东西是无法进行直接比较的,所以我们不能盲目的去和别人对比,更不能盲目攀比.当然我们可以用相对性去比较,比如你某方面不如别人,但你每天都在进步,并且进步很大.应该感到欣慰,应该继续向目标前进.如果不如别人也不能自暴自弃.</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">教学重点：随机变量的 k 阶原点矩、k 阶中心矩、变异系数、偏度、峰度的概念。
教学难点：偏度和峰度的含义。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">1.掌握随机变量的 k 阶原点矩、k 阶中心矩、变异系数的概念；
2.了解 k 阶原点矩、k 阶中心矩之间的关系；
3.掌握随机变量偏度和峰度的定义，了解偏度和峰度的含义；</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、课堂讨论、课堂练习，启发式与提问式相结合等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">传统板书与多媒体课件辅助教学相结合.</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">习题 2-7　第 2、4、5、题。</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1]陈希孺.概率论与数理统计.北京:科学出版社.2002.
[2]李贤平.概率论基础.3 版.北京:高等教育出版社.2010.
[3] 盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计.北京:高等教育出版.2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程

一、导入

数学期望和方差是随机变量最重要的两个特征数,此外，随机变量还有一些其他的特征数.

由于$|x|^{k-1}\le|x|^k+1$，所以若X的k阶矩存在，则X的$k-1$阶矩也存在，而低于k阶的各阶矩都存在.

2.7.1 k阶矩

定义 2.7.1 设$k\in Z^{+}$，若以下数学期望都存在，则称

（1）X的k阶原点矩：$\mu_k=E(X^k),k=1,2,\cdots$

（2）X的k阶中心矩$v_k=E(X-E(X))^k,k=1,2,\cdots$

（3）X与 Y 的$k+1$ 阶混合原点矩：

$$E(X^kY^l),(k,l=1,2,\cdots)$$

（4）X与 Y 的$k+1$ 阶混合中心矩：

$$E[(X-E(X))^k(Y-E(Y)^l)],(k,l=1,2,\cdots)$$

例 2.7.1 设$X\sim N(0,2)$，则

$$\mu_k=E(X^k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^ke^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\xlongequal{u=\frac{x}{\sigma}}\frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u^ke^{-\frac{u^2}{2}}du$$

（1）当k为奇数时，有$\mu_k=0,k=1,3,5,\cdots$

(2）当k为偶数时，有

$$\mu_k\xlongequal{z=\frac{u^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^k2^{\frac{k-1}{2}}\int_0^{+\infty}z^{\frac{k-1}{2}}e^{-z}dz$$

$$=\sigma^k(k-1)!!\quad(k=2,4,\cdots)$$

2.7.2 变异系数

方差或标准差反映了随机变量取值的波动程度，但在比较两个随机变量的波动大小时，如果只看方差或标准差的大小有时会产生不合理的现象.这有两个原因:

（1）随机变量的取值有量纲，不同量纲的随机变量用其方差或标准

教学流程

差去比较它们的波动大小不太合理.

（2）在相同量纲下，取值大小也有一个相对性问题，取值较大的随机变量的方差或标准差也允许大一些.

所以，比较两个随机变量的波动大小时，在有些场合下使用变异系数更具有可比性.

定义 2.7.2 设随机变量 X 的二阶矩存在，则称

$$C_v(X)=\frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}=\frac{\sigma(X)}{E(X)}$$

为 X 的变异系数(Coefficient of variation)或标准差率.

因为变异系数是以数学期望为单位去度量随机变量取值的波动程度的特征数，标准差的量纲与数学期望的量纲是一致的，所以变异系数是一个无量纲的量，从而消除了量纲对波动的影响.

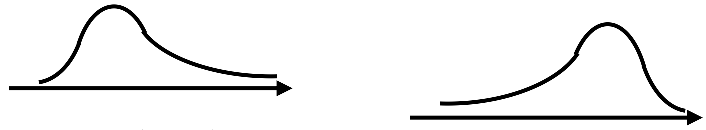
(有些东西是无法进行直接比较的,所以我们不能盲目的去和别人对比,更不能盲目攀比.当然我们可以用相对性去比较,比如你某方面不如别人,但你每天都在进步,并且进步很大.应该感到欣慰,应该继续向目标前进.如果不如别人也不能自暴自弃.)

定义 2.7.3 设随机变量 X 的前三阶矩存在，则称

$$\beta_s=\frac{v_3}{v_2^{3/2}}=\frac{E[X-E(X)]^3}{[Var(X)]^{3/2}}$$

为 X 的偏度系数(Coefficient of skewness)，简称偏度.

偏度 β_s 是描述分布偏离对称性程度的一个特征数.



正偏(右偏)　　负偏(左偏)

定义 2.7.4 设随机变量 X 的前三阶矩存在，则称

教学流程	$$\beta_k=\frac{v_4}{v_2^2}=\frac{E[X-E(X)]^4}{[Var(X)]^2}-3$$ 为 X 的峰度系数(Coefficient of kurtosis)，简称峰度. 峰度 β_k 是描述分布尖峭程度和(或)尾部粗细的一个特征数. （1）正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 $v_2=\sigma^2, v_4=3\sigma^2$，故 $\beta_k=0.$ 可见这里谈论的“峰度”不是指密度函数的峰值高低. （2）令 $X^*=\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$，则 $$\beta_k=\frac{E(X^{*4})}{E^2(X^{*2})}-3=E(X^{*4})-E(U^4)$$ 上式表明：峰度 β_k 是相对于正态分布而言的超出量.
教学后记	

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第三章 多维随机变量及其分布</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>3.1 多维随机变量及其联合分布（1）</td><td>时间</td><td colspan="2">年 月 日第 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：熟练掌握二维联合分布的计算，常见多维分布。
能力目标：培养学生总结归纳能力和计算能力。
素质目标（价值观目标）：培养学生爱国主义精神。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：联合分布列的计算，区域上概率的计算，常见多维分布
难点：联合分布列的计算，区域上概率的计算</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">要求学生掌握二重积分的计算和熟练掌握随机变量分布的相关知识。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线下</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">3.1:1,2,5</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1] 陈希孺.《概率论与数理统计》.北京:科学出版社，2002.
[2] 吴传生等.《概率论与数理统计》（第三版）. 北京:高等教育出版社，2015.
[3] 盛骤，谢式千，潘承毅.《概率论与数理统计》.北京：高等教育出版，2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>教
学
流
程</td><td>

一、思政导入：9 月 25 日，全国人民云接机孟晚舟回家。当新华社报道“经中国政府不懈努力，当地时间 9 月 24 日，孟晚舟女士已经乘坐中国政府包机离开加拿大，即将回到祖国，并与家人团聚。”全国人民沸腾了，都感受到祖国的伟大，当晚很多人直播观看飞机实时轨迹，那么飞机位置的确定有哪些量？（经度，纬度，高度）三维随机变量。

（说明祖国的强大和祖国对每个公民的爱戴，培养学生的爱国主义情怀）

多维随机变量的定义：

称$X(\omega)=(X_1(\omega),X_2(\omega),....,X_n(\omega))$为 n 维随机变量。

定义 3.1.2 称$F(x_1,x_2,....x_n)=P(X_1\le x_1,X_2\le x_2,.......X_n\le x_n)$为 N 维随机变量$(X_1,X_2,....,X_n)$的联合分布函数。

定理 3.1.1 二维联合分布的性质：

（1）单调性 当$x_1<x_2$时，有$F(x_1,y)\le F(x_2,y)$

当$y_1<y_2$时，有$F(x\ \ ,y_1)\le F(x\ \ ,y_2)$

（2）有界性 $0\le F(x\ \ ,y\ \ )\le 1$

$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0$$

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0$$

$$F(\infty,\infty)=\lim_{x,y\to\infty}F(x,y)=1$$

（3）右连续性

$F(x+0,y)=F(x,y)$

$F(x,y+0)=F(x,y)$

（4）非负性

$$P(a<X\le b,c<X\le d)=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)\ge 0$$

引例 3.1.1 二元函数

$$G(x,y)=\begin{cases}0 & x+y<0\\1 & x+y\ge 0\end{cases}$$

不满足性质 4.故不是二维分布函数。

3.1.3 联合分布列

联合分布的基本性质：

（1）非负性：$P_{ij}\ge 0$

（2）正则性：$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}P_{ij}=1$

</td></tr>
</table>

教学流程

引例 3.1.2 从 1,2,3,4 中任取一数记为X，再从 $1,\cdots,X$中任取一数记为Y，求(X,Y)的联合分布列及$P(X=Y)$

解： 当$i<j$时

$$P(X=i,Y=j)=0$$

当$1\le j\le i\le 4$ 时

$$P(X=i,Y=j)+P(X=i)P(Y=j/X=i)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{i}$$

$$P(X=Y)=P_{11}+P_{22}+P_{33}+P_{44}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{25}{48}$$

3.1.4 联合密度函数

定义 3.1.4 若$F(X,Y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}P(u,v)dudv$，则称$P(u,v)$为$(X,Y)$的联合密度函数。且

$$P(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)$$

联合密度函数的性质：

（1）非负性：$P(x,y)\ge 0$

（2）正则性：$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P(x,y)dxdy=1$

例 3.1.3 设(X,Y)的联合密度函数为

$$P(x,y)=\begin{cases}6e^{-2x-3y} & x>0,y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

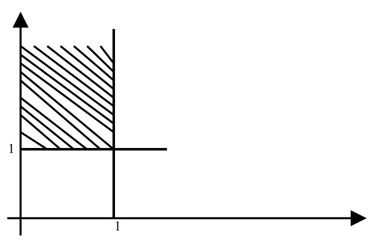
试求：$(1)P(x<1,y>1);(2)P(x>y)$

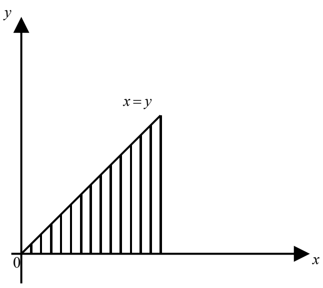
解：（1）$P(x<1,y>1)=P((X,Y)\in D_1)$

$$=\int_1^{\infty}\int_0^1 6e^{-2x-3y}\,dxdy$$

$$=\int_0^1 e^{-2x}\,dx\int_1^{\infty}e^{-3y}\,dy$$

$$=(1-e^{-2})e^{-3}=0.0430$$



教学流程	（2） $$P(x>y)=P((X,Y)\in D_2)$$ $$=\int_0^{\infty}\int_0^{x}6e^{-2x-3y}\,dydx$$ $$=\int_0^{\infty}2e^{-2x}\,(1-e^{-3x})dx$$ $$=[-e^{-2x}+\frac{1}{5}e^{-5x}]_0^{\infty}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$ 
教学后记	1. 讲课前要补充二重积分的计算。 2. 求区域上的概率和由概率密度函数求联合分布函数时用到二重积分，但很多学生找不对积分范围。

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要 素</td><td colspan="4">内 容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第三章 多维随机变量及其分布</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>3.1 多维随机变量及其联合分布（2）</td><td>时间</td><td colspan="2">年 月 日第 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：熟练掌握二维联合分布的计算，常见多维分布。
能力目标：培养学生总结归纳能力和计算能力。
素质目标（价值观目标）：培养学生爱国主义精神。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：联合分布列的计算，区域上概率的计算，常见多维分布
难点：联合分布列的计算，区域上概率的计算</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">要求学生掌握二重积分的计算和熟练掌握随机变量分布的相关知识。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线下</td></tr>
<tr><td>练 习
作 业</td><td colspan="4">3.1:1,2,5</td></tr>
<tr><td>参 考
资 料</td><td colspan="4">[1] 陈希孺.《概率论与数理统计》.北京:科学出版社，2002.
[2] 吴传生等.《概率论与数理统计》（第三版）. 北京:高等教育出版社，2015.
[3] 盛骤，谢式千，潘承毅.《概率论与数理统计》.北京：高等教育出版，2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>

思政导入：在平面直角坐标系下，随机变量 X 和 Y 可以分别取遍 x 轴和 y 轴，可当他们联合起来构成二维随机变量 (X, Y) (X, Y) 的时候却可以取遍整个坐标平面，进而利用二维联合分布函数可以得到更广泛的应用。这说明团队的力量远远大于个人单干，我们要注重团队和集体的力量，要团结，扬长避短，才能取得更大的成绩，就好比我们参加数学建模竞赛，要团队中的三个人共同努力协作才可以，如果三个人各做各的，总觉得自己的观点是对的，不去讨论，或者有的团队成员中途放弃了，这样的团队能不能如期的完成比赛都是问题，又怎么可能取得好的成绩。

3.1.5 常用的多维分布

一、多项分布：其中$A_1,A_2,\ldots A_r$各出现$n_1,n_2,\ldots n_r$次，则$P(X_1=n_1,X_2=n_2,\ldots X_r=n_r)=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_2!}{P_1}^{n_1}P_2^{n_2}\ldots.P_r^{n_r}$**例 3.1.4** 100 件产品，一等品 60 件，二等品 30 件，三等品 10 件，任取三件，X,Y分别表示一等品，二等品的数量，求：(X,Y)的联合分布

$$P_{ij}=\frac{3!}{i!\,j!\,(3-i-j)!}(\frac{6}{10})^i(\frac{3}{10})^j(\frac{1}{10})^{3-i-j}$$

其中$i+j\leq 3$，当$i+j>3$ 时$P_{ij}=0$

可以计算其他有关事件的概率：

$$P(X\leq 1,Y\leq 1)=0.001+0.009+0.018+0.108=0.136$$

$$P(X=0)=\sum_{j=0}^{3}P(X=0,Y=j)$$
$$=0.001+0.009+0.027+0.027=0.064$$

二、多维超几何分布

$$P(X_1=n_1,X_2=n_2,\ldots X_r=n_r)=\frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\ldots.\binom{N_r}{n_r}}{\binom{N}{n}}$$

可以看成取各种类型的球$n_1,n_2,\ldots\ldots n_r$个的概率。

例 3.1.5 将 **3.1.4** 例改为不放回抽样，抽取 3 次，X,Y分别表示

</td>
</tr>
</table>

教学流程

一等品，二等品的数量，求：(X,Y)的联合分布

$$P_{ij}=\frac{\binom{60}{i}\binom{30}{j}\binom{10}{3-i-j}}{\binom{100}{3}}$$

其中$i+j\le 3$，当$i+j>3$ 时$P_{ij}=0$

计算其他有关事件的概率：

$$P(X\le 1,Y\le 1)=0.0007+0.0167+0.0083+0.1113=0.1370$$

$$P(X=0)=\sum_{j=0}^{3}P(X=0,Y=j)$$
$$=0.0007+0.0083+0.0269+0.0251=0.0610$$

三、多维均匀分布

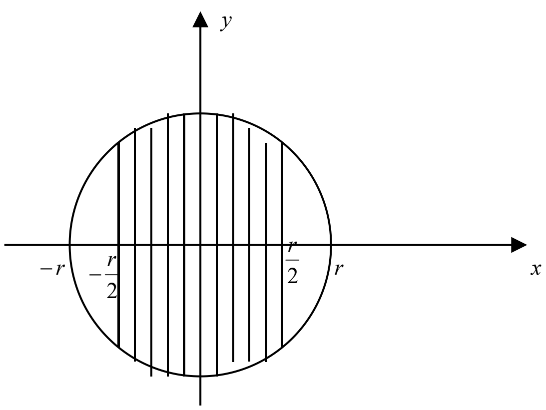
$(X_1,X_2,....X_n)$的联合密度函数为

$$P(x_1,x_2,...x_n)=\begin{cases}\frac{1}{S_D} & (x_1,x_2,....x_n)\in D\\ 0 & 其他\end{cases}$$

例 3.1.6 设(X,Y)的联合密度函数为

$$P(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi r^2} & x^2+y^2\le r^2\\ 0 & 其他\end{cases}$$

试求$P(\lvert X\rvert\le\frac{r}{2})$



<table>
<tr><td>教学流程</td><td>

$$P(|X| \le \frac{r}{2}) = \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{\pi r^2} dy \right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi r^2} \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} 2\sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$= \frac{1}{\pi r^2} \left[x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \arcsin \frac{x}{r} \right] \Bigg|_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = 0.609$$

四、二元正态分布

$$P(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

$$-\infty < x, y < +\infty$$

</td></tr>
<tr><td>教 学
后 记</td><td>3. 讲课前要补充二重积分的计算。
4. 求区域上的概率和由概率密度函数求联合分布函数时用到二重积分，但很多学生找不对积分范围。</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第三章 多维随机变量及其分布</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>3.2 边际分布与随机变量的独立性（1）</td><td>时间</td><td colspan="2">年 月 日第 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：掌握边际分布函数，边际分布列，边际密度函数的计算。
能力目标：培养学生计算能力和数形结合能力。
素质目标（价值观目标）：培养学生数形结合的数学思想。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：边际分布函数，边际分布列，边际密度函数的计算。
难点：边际密度函数的计算。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">学生熟练掌握定积分的计算。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线下</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">3.2:5,6</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1] 陈希孺.《概率论与数理统计》.北京:科学出版社，2002.
[2] 吴传生等.《概率论与数理统计》（第三版）. 北京:高等教育出版社，2015.
[3] 盛骤，谢式千，潘承毅.《概率论与数理统计》.北京：高等教育出版，2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

<table>
<tr><td rowspan="2">教学流程</td><td>

导入：

3.2.1 边际分布的定义

$$F_X(x)=F(x,\infty)=P(X\le x,\quad -\infty<y<+\infty)$$
$$F_Y(y)=F(\infty,y)=P(-\infty<x<+\infty,\quad Y\le y)$$

例 3.2.1 设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y-\lambda xy} & x>0,y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

X,Y的边际分布函数为：

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\begin{cases}1-e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$
$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

3.2.2 边际分布列

边际分布列的定义；

$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)$ $\qquad$ $P(Y=y_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)$

例 3.2.2 设二维随机变量(X,Y)的联合分布列为：

$X \backslash Y$	1	2	3	$P(X=i)$
0	0.009	0.21	0.24	0.54
1	0.007	0.12	0.27	0.46
$P(Y=j)$	0.16	0.33	0.51	

3.2.3 边际密度函数

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}P(u,v)dv\right)du=\int_{-\infty}^{x}P_X(u)du$$

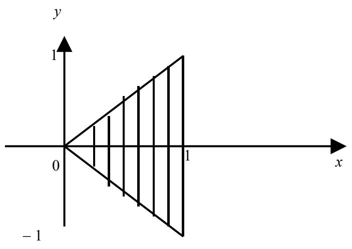
$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}P(u,v)du\right)dv=\int_{-\infty}^{y}P_Y(v)dv$$

边际密度分别为：

$P_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)dy$ $\qquad$ $P_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)dx$

例 3.2.3 设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为

</td></tr>
</table>

教学流程	$$P(x,y)=\begin{cases}1 & 0<x<1,\lvert y\rvert<x\\0 & 其他\end{cases}$$ 求（1）边际密度函数$P_X(x)$，$P_Y(y)$；（2）$P(X<\frac{1}{2})$及$P(Y>\frac{1}{2})$  解：（1）当 $0<x<1$ 时 $P_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)dy=\int_{-x}^{x}dy=2x$ 当$x\le 0$, 或$x\ge 1$ 时$P_X(x)=0$ $$P_X(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\0 & 其他\end{cases}$$ 当$y\le -1$, 或$y\ge 1$ 时$P_Y(y)=0$ 当$-1<y<0$ 时 $P_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)dx=\int_{-y}^{1}dx=1+y$ 当 $0<y<1$ 时 $P_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)dx=\int_{y}^{1}dx=1-y$ 所以Y的边际密度函数为 $$P_X(x)=\begin{cases}1+y & -1<y<0\\1-y & 0<y<1\\0 & 其他\end{cases}$$ （2）$P(X<\frac{1}{2})=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}P_X(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=\frac{1}{4}$ $$P(Y>\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}P_Y(y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-y)dy=\frac{1}{8}$$ **例 3.2.5** 二维正太分布的边际分布为一维正太分布

<table>
<tr>
<td>教
学
流
程</td>
<td>

$$P(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right.$$

$$\left.\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$-\infty<x,y<+\infty$$

$$P(u,v)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u^2-2\rho uv+v^2]\right\}$$

$$-\infty<u,v<+\infty$$

$$P_v(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(u,v)du$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u^2-2\rho uv+v^2]\right\}du$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left\{\left(-\frac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}\right)+\left(-\frac{v^2}{2}\right)\right\}du$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\left(e^{-\frac{1}{2}v^2}\right)\sqrt{1-\rho^2}\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left\{\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right\}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}v^2}$$

这里 令$\frac{(u-\rho v)}{\sqrt{1-\rho^2}}=t$

（思政：提示学生要以严谨的科学的态度去学习，不能想当然，比如两个一维的正态分布，他们构成的二维随机变量，就不一定是二维正态分布，并鼓励学生查阅资料举出反例，加深对二维正态分布的理解，强调部分不能决定整体，同时也能培养学生的探究精神。）

</td>
</tr>
<tr>
<td>教　学
后　记</td>
<td>

1. 通过对比、讲授、讨论等方法，让学生掌握边际分布的定义及计算方法。

2. 要善于引导学生自己发现问题，再讨论如何理解该问题，能加深学生的理解。

</td>
</tr>
</table>

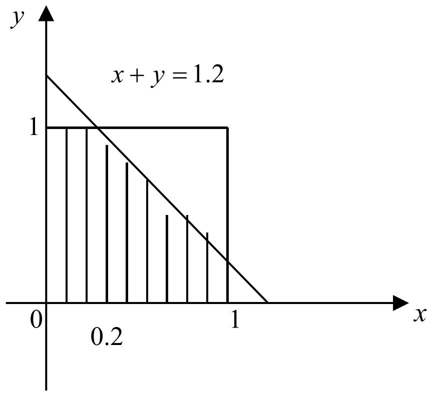
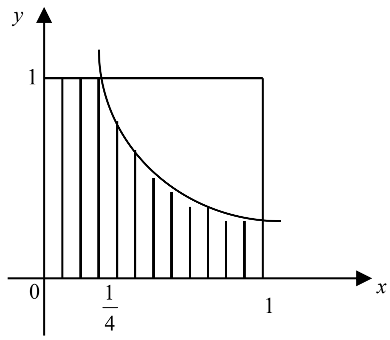
章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第三章 多维随机变量及其分布</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>3.2 边际分布与随机变量的独立性（2）</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　日第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：掌握随机变量独立性的定义，并会判断随机变量是否独立。
能力目标：培养学生计算能力和数形结合能力。
素质目标（价值观目标）：培养学生用辩证的思维思考问题的能力。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：判断随机变量的独立。
难点：随机变量的对立性和随机事件对立性之间的关系。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">学生熟练掌握定积分的计算。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线下</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">12,13,14</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1] 陈希孺.《概率论与数理统计》.北京:科学出版社，2002.
[2] 吴传生等.《概率论与数理统计》（第三版）. 北京:高等教育出版社，2015.
[3] 盛骤，谢式千，潘承毅.《概率论与数理统计》.北京：高等教育出版，2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程	导入： 复习边际分布函数，边际分布列，边际密度函数. 3.2.4 随机变量的独立性 **定义 3.2.1** 若对于联合分布$(X_1,X_2,....X_n)$的分布函数，对于任意的$x_1,x_2,...x_n$，$F(x_1,x_2,...x_n)$满足 $$F(x_1,x_2,...x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_i(x)$$ 则称$X_1,X_2,.......X_n$相互独立。 另外对于联合密度函数$P(x_1,x_2,...x_n)$，若满足$P(x_1,x_2,...x_n)=\prod_{i=1}^{n}P_i(x)$则称$X_1,X_2,.......X_n$相互独立。 **注**：讲解随机变量的独立和随机事件的独立的关系及不同之处，包括如何互化。 （通过上面的讲解，培养学生”辩证”的思维品质，让学生学会用联系的思维思考问题，要思考事物之间的关系与区别） **例 3.2.6** 从(0,1)中任取两个数，求以下事件的概率； 两数之和小于$\frac{1}{2}$；两数之积小于$\frac{1}{4}$。 解：X,Y相互独立，故联合密度函数为： $$P(x,y)=P_X(x)P_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<x<1,0<y<1\\0 & 其他\end{cases}$$ （1）事件$\left\{X+Y<\frac{1}{2}\right\}$的概率为： $$P(X+Y<\frac{1}{2})=\int_0^{0.2}(\int_0^1 dy)dx+\int_{0.2}^{1}(\int_0^{1.2-x}dy)dx$$ $$=0.2+\int_{0.2}^{1}(1.2-x)dx=0.2+0.48=0.68$$ （2）事件$\left\{XY<\frac{1}{4}\right\}$的概率为： $$P(XY<\frac{1}{4})=\int_0^{\frac{1}{4}}(\int_0^1 dy)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{1}(\int_0^{\frac{1}{4x}}dy)dx$$

教学流程	$$=\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}ln\,4=0.5966$$   **例 3.2.7** 若二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为 $$P(x,y)=\begin{cases}8xy & 0\le x\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$ 问；X,Y是否独立？ 当$x<0$ 或$x>1$ 时，有$P_X(x)=0$ 当 $0\le X\le 1$ 时，有 $$P_X(x)=\int_x^1 8xydy=8x(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2})=4x(1-x^2)$$ 于是$P_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2) & 0\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$ 同样，当$x<0$ 或$x>1$ 时，有$P_Y(y)=0$ 当 $0\le y\le 1$ 时，有

教学流程

$$P_Y(y)=\int_0^y 8xydy=4y^3$$

于是$P_Y(y)=\begin{cases}4y^3 & 0\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$

故$P(x,y)\neq P_X(x)P_Y(y)$，所以X,Y不独立。

例 3.2.8 若二维随机变量(X,Y)的联合分布函数如下；判定X,Y独立性？

（1） $P\ \ (x,y)=\begin{cases}6xy^2 & 0\le x,y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$

（2） $P\ \ (x,y)=\begin{cases}12y^2 & 0\le y\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$

（3） $P\ \ (x,y)=\begin{cases}6\,exp\{-2x-3y\} & x>0,y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

（4） $P\ \ (x,y)=\begin{cases}x^2+\frac{xy}{3} & 0<x<1,0<y<2\\ 0 & 其他\end{cases}$

解：（1）

$$P_X(x)=\int_0^1 6xy^2dy=2x,\qquad x\in D_x=(0,1)$$

即$P_X(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$P_Y(y)=\int_0^1 6xy^2dx=3y^2,\qquad y\in D_y=(0,1)$$

即$P_Y(y)=\begin{cases}3y^2 & 0\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$

故$P(x,y)=P_X(x)P_Y(y)$所以X,Y独立。

（2）由于X的取值受Y的决定，故X,Y不独立。

（3）

$$P_X(x)=\int_0^\infty 6\,exp\{-2x-3y\}dy=2e^{-2x},\qquad x\in D_x=\{x>0\}$$

$$P_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$P_Y(y)=\int_0^\infty 6\,exp\{-2x-3y\}dx=3e^{-3y},y\in D_y=\{y>0\}$$

教 学 流 程	$$P_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$ 于是$P(x,y)=P_X(x)P_Y(y)$，所以X,Y独立。 （4）边际分布为 $P_X(x)=\int_0^2(x^2+\frac{xy}{3})dy=2x^2+\frac{2}{3}x,\qquad x\in D_x=(0,1)$ $$P_X(x)=\begin{cases}2x^2+\dfrac{2}{3}x & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$ $$P_Y(y)=\int_0^1(x^2+\frac{xy}{3})dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}y,\qquad y\in D_y=(0,2)$$ $$P_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}y & 0<y<2\\ 0 & 其他\end{cases}$$ 于是$P(x,y)\neq P_X(x)P_Y(y)$，所以X,Y不独立。
教　学 后　记	1. 通过对比、讲授、讨论等方法，让学生掌握边际分布的定义及计算方法。 2. 要善于引导学生自己发现问题，再讨论如何理解该问题，能加深学生的理解。

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第三章 多维随机变量及其分布</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>3.3 多维随机变量函数的分布（1）</td><td>时间</td><td colspan="2">年 月 日第 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：掌握二维随机变量函数分布的计算方法。
能力目标：培养学生归纳总结的推导能力。
素质目标（价值观目标）：培养学生举一反三的数学素养。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：分布函数法和变量变换法
难点：分布函数法和变量变换法</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">学生回顾 2.6 中分布函数法。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线下</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">3.3:1,6,7</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1] 陈希孺.《概率论与数理统计》.北京:科学出版社，2002.
[2] 吴传生等.《概率论与数理统计》（第三版）. 北京:高等教育出版社，2015.
[3] 盛骤，谢式千，潘承毅.《概率论与数理统计》.北京：高等教育出版，2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>

思政导入：要学会联系的科学的发展观，万物皆有联系，而不同的随机变量之间也有联系，鼓励学生通过本次课程的学习，能够自己去总结、发现、体会这些巧妙的联系，并利用这些联系，进行更多的延伸思考。

例 3.3.1 设二维随机变量(X,Y)的联合分布列如下

X \ Y	−1	1	2
−1	5/20	2/20	6/20
2	3/20	3/20	1/20

试求（1）$Z_1=X+Y$ （2）$Z_2=X-Y$

（3）$Z_3=max\{X,Y\}$

解：所求分布列为：

$Z_1=X+Y$	−2	0	1	3	4
P	5/20	2/20	9/20	3/20	1/20

例 3.3.2 （泊松分布的可加性）

设随机变量$X\sim P(\lambda_1),Y\sim P(\lambda_2)$，求证：$Z=X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

证明;

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=o}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!\,(k-i)!}(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^i(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^k$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\qquad i=0,1,\ldots.,k$$

故$Z=X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

记为$P(\lambda_1)*P(\lambda_2)=P(\lambda_1+\lambda_2)$

一般的有

</td>
</tr>
</table>

教学流程	$P(\lambda_1)*P(\lambda_2)*\cdots\cdots*P(\lambda_n)=P(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n)$ **例 3.3.3 （二项分布的可加性）** 设随机变量$X\sim b(n,P),Y\sim b(m,P)$，求证： $Z=X+Y\sim b(m+n,P)$ 证明; $$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$$ $$=\sum_{i=o}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$ 由$k-i\le m,i\le n$得$k-m\le i\le n$，又 $0\le i\le k$故 $a=\{0,k-m\}\le i\le min\{n,k\}=b$ $$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$$ $$=\sum_{i=o}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$ $$=\sum_{i=a}^{b}\binom{n}{i}P^i(1-P)^{n-i}\binom{m}{k-i}P^{k-i}(1-p)^{m-(k-i)}$$ $$=P^k(1-P)^{n+m-k}\sum_{i=a}^{b}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$ $$=\binom{n+m}{k}P^k(1-P)^{n+m-k}$$ $k=0,1,\cdots,n+m.$ 这表明 $Z=X+Y\sim b(m+n,P)$记为$b(n,P)*b(m,P)=b(n+m,P)$ 一般的有 $b(n_1,P)*b(n_2,P)*\cdots*b(n_k,P)=b(n_1+n_2+\cdots+n_k,P)$ **3.3.2 最大值与最小值的分布** **例 3.3.4 （最大值分布）** 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量， 若 $Y=max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，在以下情况下求$Y$的分布。 （1）$X_i\sim F_i(x),i=1,2,\cdots,n$; （2）$X_i$同分布，$X_i\sim F\ \ (x),i=1,2,\cdots,n$。 （3）$X_i$同分布，为连续随机变量，$X_i$的密度均为$P(x)$。 （4）$X_i\sim Exp(\lambda),i=1,2,\cdots,n$ 解：（1）$Y=max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的分布为; $$F_Y(y)=P(max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le y)$$ $$=P(X_1\le y),X_2\le y,\cdots,X_n\le y)$$

教学流程	$$= P(X_1 \le y)P(X_2 \le y)\cdots P(X_n \le y) = \prod_{i=1}^{n} F_i(y).$$ (2) 若$X_1, X_2, \cdots, X_n$同分布$F(x)$，则 $$F_Y(y) = [F(y)]^n$$ (3) 若$X_1, X_2, \cdots, X_n$同分布$F(x)$，则$F_Y(x)$的密度函数为: $P_Y(y) = F_Y^{'}(y) = n[F(y)]^{n-1}P(y)$ (4) 由$X_i \sim Exp(\lambda), i = 1,2,\cdots,n$得: $$F_Y(y) = \begin{cases}(1-e^{-\lambda y})^n & y \ge 0 \\ 0 & y < 0\end{cases}$$ $$P_Y(y) = \begin{cases}n(1-e^{-\lambda y})^{n-1}\lambda e^{-\lambda y} & y \ge 0 \\ 0 & y < 0\end{cases}$$ **例 3.3.5（最小值分布）** 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是 n 个相互独立的随机变量，若 $Y = min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，在以下情况下求$Y$的分布。 （1）$X_i \sim F_i(x), i = 1,2,\cdots,n$; （2）$X_i$同分布，$X_i \sim F\ \ (x), i = 1,2,\cdots,n$。 （3）$X_i$同分布，为连续随机变量，$X_i$的密度均为$P(x)$。 （4）$X_i \sim Exp(\lambda), i = 1,2,\cdots,n$ 解：（1）$Y = min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$的分布为; $$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \le y) \\ &= 1 - P(min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} > y) \\ &= 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y)\cdots P(X_n > y) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - F_i(y)]. \end{aligned}$$ (2) 若$X_1, X_2, \cdots, X_n$同分布$F(x)$，则 $$F_Y(y) = 1 - [1 - F(y)]^n$$ (3) 若$X_1, X_2, \cdots, X_n$同分布$F(x)$，则$F_Y(x)$的密度函数为: $P_Y(y) = F_Y^{'}(y) = n[1 - F(y)]^{n-1}P(y)$ (4) 由$X_i \sim Exp(\lambda), i = 1,2,\cdots,n$得: $$F_Y(y) = \begin{cases}1 - e^{-n\lambda y} & y \ge 0 \\ 0 & y < 0\end{cases}$$ $$P_Y(y) = \begin{cases}n\lambda e^{-n\lambda y} & y \ge 0 \\ 0 & y < 0\end{cases}$$ **例 3.3.6** 某段道路原来有 5 个路灯，道路改建后有 20 个路灯来晚间照明，改建后道路管理人员发现灯泡更容易坏了，请解释其中原因。 **解;** $T_i \sim Exp(\lambda), i = 1,2,\cdots,n$。 其平均寿命为$\lambda^{-1} = 2000$ 小时，5 个灯泡第一个烧坏的时间 $T_1 = min\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$，$T_1 \sim Exp(5\lambda)$ 若灯泡每天用 10 个小时，则 30 天换灯泡的概率为; $$P(T_1 \le 300) = F_Y(y) = 1 - exp\{-5\lambda.300\}$$

教学流程	$$=1-exp\{-\frac{1500}{2000}\}=0.5276$$ 20 个灯泡第一个烧坏的时间 $$T_2=min\{X_1,X_2,\cdots,X_{20}\}$$ $T_2 \sim Exp(20\lambda)$ $P(T_2\le 300)=F_Y(y)=1-exp\{-20\lambda.300\}$ $$=1-exp\{-\frac{6000}{2000}\}=0.9502$$ 这说明道路改建后，在 30 天换灯泡的概率更加高，为此需要换上高寿命的节能灯。
教学后记	1. 要结合一维分布函数法来类比得到二维分布函数法。 2. 分布函数法的应用难点在二重积分的计算，所以要加强积分区域的练习。

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第三章 多维随机变量及其分布</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>3.3 多维随机变量函数的分布（2）</td><td>时间</td><td colspan="2">年 月 日第 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：掌握二维连续型随机变量函数分布的计算方法。
能力目标：培养学生归纳总结的推导能力。
素质目标（价值观目标）：培养学生举一反三的数学素养。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：分布函数法和变量变换法
难点：分布函数法和变量变换法</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">学生回顾 2.6 中分布函数法。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线下</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">3.3:1,6,7</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1] 陈希孺.《概率论与数理统计》.北京:科学出版社，2002.
[2] 吴传生等.《概率论与数理统计》（第三版）. 北京:高等教育出版社，2015.
[3] 盛骤，谢式千，潘承毅.《概率论与数理统计》.北京：高等教育出版，2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教
学
流
程</td>
<td>

一、导入

复习上一节课内容

二、**讲解**

3.3.3 连续场合的卷积公式

定理 3.3.1 设X,Y是两个独立的随机变量，其密度函数分别为$P_X(x)$和$P_Y(y)$，则其和$Z=X+Y$的密度函数为：

$$P_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}P_X(z-y)P_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}P_X(x)P_Y(z-x)dx$$

证明：

$$F_Z(z)=P(X+Y\leq z)=\iint_{x+y\leq z}P_X(x)P_Y(Y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\{\int_{-\infty}^{z-y}P_X(x)dx\}P_Y(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}F_X(z-y)P_Y(y)dy$$

$$P_Z(z)=F_Z^{'}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}P_X(z-y)P_Y(y)dy$$

类似可证：

$$P_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}P_X(x)P_Y(z-x)dx$$

故原结论成立。

例 3.3.7 （正态分布的可加性）

设X,Y是两个独立的随机变量，$X\sim N(\mu_1,{\sigma_1}^2)$，

$Y\sim N(\mu_2,{\sigma_2}^2)$

证明其和$Z=X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)$

解：由$P_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}P_X(z-y)P_Y(y)dy$得

$P_Z(z)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}exp\{-\frac{1}{2}[\frac{(z-y-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}]\}dy$ 又 $\frac{(z-y-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}=A(y-\frac{B}{A})^2+\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$

其中$A=\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}$，$B=\frac{z-\mu_1}{\sigma_1^2}+\frac{\mu_2}{\sigma_2^2}$

</td>
</tr>
</table>

教学流程

$$P_Z(z)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}exp\{-\frac{1}{2}\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\}\int_{-\infty}^{\infty}exp\{-\frac{A}{2}(y-\frac{B}{A})^2\}dy\,P_Z(z)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}exp\{-\frac{1}{2}\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\}$$

这里$\int_{-\infty}^{\infty}exp\{-\frac{A}{2}(y-\frac{B}{A})^2\}dy=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{A}}$

命题得证.

一般的若 $X_i \sim N(\mu_i,{\sigma_i}^2)$，则

$$a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n\sim N(\mu_0,{\sigma_0}^2)$$

其中$\mu_0=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i$，${\sigma_0}^2=\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2{\sigma_i}^2$。

例：设X,Y是两个独立的随机变量，$X\sim N(-3,1)$，$Y\sim N(2,1)$，则

$$Z=X-2Y+7\sim N(0,5)$$

例 3.3.8 （伽玛分布的可加性）

设X,Y是两个独立的随机变量，$X\sim Ga(\alpha_1,\lambda)$，$Y\sim Ga(\alpha_2,\lambda)$

证明其和$Z=X+Y\sim Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$

由$P_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}P_X(z-y)P_Y(y)dy$得

$$P_Z(z)=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^z(z-y)^{\alpha_1-1}e^{-\lambda(z-y)}y^{\alpha^2-1}e^{-\lambda y}dy$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}e^{-\lambda z}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^z(z-y)^{\alpha_1-1}y^{\alpha^2-1}dy$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}e^{-\lambda z}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}z^{\alpha_1+\alpha_2-1}\int_0^1(1-t)^{\alpha_1-1}t^{\alpha^2-1}dt$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda z}$$

故$Z=X+Y\sim Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$

记为$Ga(\alpha_1,\lambda)*Ga(\alpha_2,\lambda)=Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$

一般的有

$$Ga(\alpha_1,\lambda)*Ga(\alpha_2,\lambda)*\cdots*Ga(\alpha_n,\lambda)=Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$$

又$Exp(\lambda)=Ga(1,\lambda)$，$X^2(n)=Ga(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$所以可得以下两个结论：

（1）m 个独立同分布的指数分布变量之和为伽玛分布变量。即

$X_1\sim Ga(1,\lambda)$，$X_2\sim Ga(1,\lambda)$，……. $X_m\sim Ga(1,\lambda)$

则$X_1+X_2+\cdots+X_m\sim Ga(m,\lambda)$记为

教学流程

$$Exp(\lambda) * Exp(\lambda) * \cdots * Exp(\lambda) = Ga(m, \lambda)$$

（2）$X_1 \sim X^2(n_1)$，$X_2 \sim X^2(n_2)$，……. $X_m \sim X^2(n_m)$

则$X_1 + X_2 + \cdots + X_m \sim X^2(n_1 + n_2 + \cdots + n_m)$即

$$X^2(n_1) * X^2(n_2) * \cdots * X^2(n_m) = X^2(n_1 + n_2 + \cdots + n_m)$$

（思政教育：

由卡方分布和指数分布都是伽玛分布的特例，我们应该站在更高的角度看待这两个分布。

教育学生要站在更高的角度看待和处理事物，不能只站在自己的角度，或只从自己所处的领域、地域看待世界万物）

3.3.4 变量变换法

原理：利用原相与相等概率，得到相关结论。

$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 对应的雅可比行列式为

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

则$P(u,v) = P(x(u,v), y(u,v))|J|$

例 3.3.11（积的公式）设X, Y是两个独立的随机变量，其密度函数分别为$P_X(x)$和$P_Y(y)$，则其和$U = XY$的密度函数为：

$$P_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(\frac{u}{v}) P_Y(v) \frac{1}{|v|} dv$$

解：记$V = Y$则$\begin{cases} u = xy \\ v = y \end{cases}$，于是$\begin{cases} x = u/v \\ y = v \end{cases}$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v}$$

$$P(u,v) = P_X(u/v)\, P_Y(v)|J| = P_X(u/v) P_Y(v) \frac{1}{|v|}$$

于是$P_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} P(u,v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(\frac{u}{v}) P_Y(v) \frac{1}{|v|} dv$

例 3.3.12（商的公式）设X, Y是两个独立的随机变量，其密度函数分别为$P_X(x)$和$P_Y(y)$，则其和$U = X/Y$的密度函数为：

法一：

$$P_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(uv) P_Y(v) |v| dv$$

解：记$V = Y$则$\begin{cases} u = x/y \\ v = y \end{cases}$，于是$\begin{cases} x = uv \\ y = v \end{cases}$

教 学 流 程	$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v & u\\ 0 & 1\end{vmatrix}=v$$ $$P(u,v)=P_X(uv)P_Y(v)\lvert J\rvert=P_X(uv)P_Y(v)\lvert v\rvert$$ 于是$P_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty}P(u,v)dv=\int_{-\infty}^{\infty}P_X(uv)P_Y(v)\lvert v\rvert dv$
教　学 后　记	1. 要结合一维分布函数法来类比得到二维分布函数法。 2. 分布函数法的应用难点在二重积分的计算，所以要加强积分区域的练习。

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第三章 多维随机变量及其分布</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>3.4 多维随机变量的特征数（1）</td><td>时间</td><td colspan="2">年 月 日第 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：会求二维随机变量的期望和方差，协方差，相关系数。
能力目标：培养学生推导能力。
素质目标（价值观目标）：培养学生认真专研，勇于探索的数学精神。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：二维随机变量的期望和方差，协方差，相关系数
难点：二维随机变量的期望和方差，协方差，相关系数</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">学生回顾一维随机变量的期望，方差计算。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线下</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">3.4:1,2,27,28</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1] 陈希孺.《概率论与数理统计》.北京:科学出版社，2002.
[2] 吴传生等.《概率论与数理统计》（第三版）. 北京:高等教育出版社，2015.
[3] 盛骤，谢式千，潘承毅.《概率论与数理统计》.北京：高等教育出版，2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程

思政导入：数学期望又成均值，也可以说是对未来的预期。有些学生平时不勤奋学习，希望考试超常发挥，一夜暴富或者赌博，对未来要有切合实际的期望，并且要脚踏实地的去实现，使学生明白未来世界的均值是基于之前世间的分布，不切实际的期望是难以实现的，树立合理的目标，注重平时的积累，踏实诚恳才能有所成。

3.4 多维随机变量函数的数学期望

定理 3.4.1 设(X,Y)是二维的随机变量，$Z=g(X,Y)$的期望为：

$$E(Z)=\begin{cases}\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)P(X=x_i,Y=y_j) & \text{离散的情形}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)P(x,y)dxdy & \text{连续的情形}\end{cases}$$

特别的

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xP(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty} xP_X(x)dx$$

$$Var(X)=E(X-E(X))^2$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2P(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2P_X(x)dx$$

例 3.4.1 在长度为 a 的线段上任意取得两个点X,Y，求X,Y两点间的平均长度。

解；二维随机变量(X,Y)的联合分布函数如下

$$P\quad(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2} & 0<x<a,0<y<a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

于是

$$E(|X-Y|)=\int_0^a\int_0^a|x-y|\frac{1}{a^2}dxdy$$
$$=\frac{1}{a^2}\{\int_0^a\int_0^x(x-y)dydx+\int_0^a\int_x^a(y-x)dydx\}$$
$$=\frac{1}{a^2}\{\int_0^a(x^2-ax+\frac{a^2}{2})dx\}=\frac{a}{3}$$

例 3.4.2 设X_1,X_2是独立同分布的随机变量，均服从指数分布$Exp(\lambda)$，求$Y=max\{X_1,X_2\}$的数学期望。

解：由$F_Y(y)=(F_{X_1}(x))^2$得

$$P_Y(y)=2(F_{X_1}(y))F_{X_1}'(y)=2(1-e^{-\lambda y})\lambda e^{-\lambda y}$$

于是

教学流程

$$E(max\{X_1,X_2\})=\int_0^{\infty}y2\lambda(1-e^{-\lambda y})e^{-\lambda y}dy$$
$$=2\int_0^{\infty}ye^{-\lambda y}d(\lambda y)-\int_0^{\infty}ye^{-2\lambda y}d(\lambda y)$$
$$=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty}ue^{-u}du-\frac{1}{2\lambda}\int_0^{\infty}ve^{-v}dv$$
$$=\frac{2}{\lambda}\Gamma(2)-\frac{1}{2\lambda}\Gamma(2)=\frac{3}{2\lambda}$$

这里$\lambda y=u,\qquad 2\lambda y=v$

性质 3.4.1 设(X,Y)是二维的随机变量，则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

证明：

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)P(x,y)dxdy$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\{\int_{-\infty}^{\infty}P(x,y)dy\}dx+\int_{-\infty}^{\infty}y\{\int_{-\infty}^{\infty}P(x,y)dx\}dy$$
$$=\int_{=\infty}^{\infty}xP_X(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}yP_Y(y)dy$$
$$=E(X)+E(Y).$$

一般的有：

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$$

性质 3.4.2 设(X,Y)是二维的随机变量且相互独立，则有

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

证明：由X,Y相互独立，有$P(x,y)=P_X(x)P_Y(y)$。

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(xy)P_X(x)P_Y(y)dxdy$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}xP_X(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}yP_Y(y)dy$$
$$=E(X)E(Y).$$

一般的有

$$E(X_1X_2,\cdots,X_n)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$$

这里$X_1X_2,\cdots,X_n$相互独立。

性质 3.4.3 设(X,Y)是二维的随机变量且相互独立，则有

$$Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)$$

证明;由方差的定义：

$$Var(X\pm Y)=E[(X\pm Y)-E(X\pm Y)]^2$$
$$=E[(X-E(X))\pm(Y-E(Y))]^2$$
$$=Var(X)+Var(Y)\pm 2E(X-E(X))(Y-E(Y))$$
$$=Var(X)+Var(Y)$$

一般的

$$Var(X_1\pm X_2\pm\cdots\pm X_n)=Var(X_1)+Var(X_2)+\cdots+Var(X_n)$$

例 3.4.3 设X_1,X_2,X_3是独立同分布的随机变量，$X_1\sim U(0,6)$，$X_2\sim N(1,3)$，$X_3\sim Exp(3)$求$Y=X_1-2X_2+3X_3$的数学期望，方差，标准差。

教学流程	解； $$E(X_1-2X_2+3X_3)=3-2\times 1+3\times\frac{1}{3}=2$$ $$Var(X_1-2X_2+3X_3)=\frac{6^2}{12}+4\times 3+9\times\frac{1}{9}=16$$ $$\sigma(X_1-2X_2+3X_3)=\sqrt{X_1-2X_2+3X_3}=\sqrt{16}=4$$ 例 3.4.4 设一袋中装有 m 个颜色不同的球，每次从中任取一个，有放回地摸取 n 次，以X表示 n 次摸球所摸得得不同颜色的数目，求$E(X)$ 解；$P(第i种颜色一次也没摸到)=(1-\frac{1}{m})^n$ $X_i=\begin{cases}1 & 第i种颜色至少摸到一次\\ 0 & 第i种颜色一次也没摸到\end{cases}\ i=1,2,\cdots,m$ 则$X=\sum_{i=1}^{m}X_i$ 由$P(X_i=0)=(1-\frac{1}{m})^n$得 $E(X_i)=P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=1-(1-\frac{1}{m})^n$ $$E(X)=mE(X_i)=m[1-(1-\frac{1}{m})^n]$$
教学后记	1. 不能灵活理解三大抽样分布的构造，遇到变形不能识别。 2. 三大抽样分布定理要强调，区间估计的枢轴量和假设检验的统计量都要用到。

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第三章 多维随机变量及其分布</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>3.4 多维随机变量的特征数（2）</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　日第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：会求二维随机变量的期望和方差，协方差，相关系数。
能力目标：培养学生推导能力。
素质目标（价值观目标）：培养学生认真专研，勇于探索的数学精神。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：二维随机变量的期望和方差，协方差，相关系数
难点：二维随机变量的期望和方差，协方差，相关系数</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">学生回顾一维随机变量的期望，方差计算。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线下</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">3.4:1,2,27,28</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1] 陈希孺.《概率论与数理统计》.北京:科学出版社，2002.
[2] 吴传生等.《概率论与数理统计》（第三版）. 北京:高等教育出版社，2015.
[3] 盛骤，谢式千，潘承毅.《概率论与数理统计》.北京: 高等教育出版，2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>
思政导入：电影中的两个角色：龙王和申公豹，影片的两个配角，但确是今天这个推送的主角，或者至少后面事情都是基于他们要搞的事情。他们要搞什么事情呢——打一场翻身仗。故事的交代是这样的，海底龙王掌管着龙族，而千百年来，整个龙族上万条龙都在海底看守大牢，大牢里是海中的怪兽或犯了天罪的妖孽，因此他们必须寸步不离的看守大牢最终被困在海里。而这也只是表象，让龙族看守海底大牢的根本原因是天庭的神仙们认为龙族是“妖”，是“妖”就不能在天上，所以才找了这么分差事将龙族困在海底，困了上千年，而千年后，一个千载难逢的机会来了，能够实现龙族的复兴，但可以担此重任的只有一人——西海龙太子敖丙。
我为什么把这个情节作为思政素材呢？因为它像极了一场投资，一个全体龙族等了一千年的、收益巨大的投资机会，可最后为什么没能实现呢？先请大家看投资学中的两个观点：
观点一：“不要把鸡蛋放在一个篮子里”
观点二：“所有鸡蛋都放在一个篮子里然后看好这个篮子”
两个观点都是权威观点，其中观点一是托宾讲的、马可维茨用公式证明出来的，这两人拿了诺贝尔经济学奖的；而观点二是让巴菲特、索罗斯赚了大钱的秘诀。分散投资和集中投资，大家可以先想想，究竟哪个有道理？想好后我们再回到剧情中。按照剧情的说法，龙族翻身这个投资机会等了上千年、搭上了上万片龙鳞、而且只有两天左右的操作时间，可这么重大的一笔投资计划，最终的操作寄托在了龙太子敖丙一个人身上，当然就剧情来讲（技能、法术等）只能这样了。但我们想一下，现实中如果是这样科不科学、理不理性，这么大的一笔投资操作，总要有个备用方案吧，全部赌在一个人的操作上，太冒险了，这已经不是投资而真的是赌了。所以龙族的失败源于既没有分散风险，也没有做好风险的管控。想想人家索罗斯狙击英镑，这位金融大鳄做了很多保障策略，不是简单的凭借一己之力跟英格兰银行较量。所以，龙族的失败，从金融学角度讲，风控没做好，或者就是说投资机会还不成熟，继续等更好。

3.4.3 协方差
定义 3.4.1 协方差的定义：
$$Cov(X,Y)=E(X-E(X))(Y-E(Y))$$
特别的$Cov(X,X)=E(X-E(X))^2=Var(X)$
（1）当$Cov(X,Y)>0$，称X,Y正相关。
（2）当$Cov(X,Y)<0$，称X,Y负相关。
（3）当$Cov(X,Y)=0$，称X,Y不相关。
性质 3.4.4 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
证明：由协方差的定义有
$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=E(X-E(X))(Y-E(Y))\\&=E\{XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y)\}\\&=E(XY)-E(X)E(Y)\end{aligned}$$
</td>
</tr>
</table>

教学流程	性质 3.4.5　若随机变量X,Y相互独立，则$Cov(X,Y)=0$，反之不然。 证明；由X,Y相互独立有$E(XY)=E(X)E(Y)$，所以 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ =0 例 3.4.6 若随机变量$X\sim N(0,\sigma^2)$，且$Y=X^2$，这里 随机变量X,Y不独立，但 $$Cov(X,Y)=Cov(X,X^2)=E(X\cdot X^2)-E(X)E(X^2)=0$$ 性质 3.4.6 对于任意的二维随机变量(X,Y)，有 $Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2Cov(X,Y)$ 证明：由方差定义得： $$\begin{aligned}Var(X\pm Y)&=E[(X\pm Y)-E(X\pm Y)]^2\\&=E[(X-E(X))\pm(Y-E(Y))]^2\\&=Var(X)+Var(Y)\pm 2E(X-E(X))(Y-E(Y))\\&=Var(X)+Var(Y)\pm 2Cov(X,Y)\end{aligned}$$ 性质 3.4.7 $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$ 性质 3.4.8　$Cov(X,a)=0$ 性质 3.4.9　$Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$ 性质 3.4.10 $Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)$ 证明：由协方差的性质得； $$\begin{aligned}Cov(X+Y,Z)&=E((X+Y)Z)-E(X+Y)E(Z)\\&=E(XZ)+E(YZ)-E(X)E(Z)-E(Y)E(Z)\\&=[E(XZ)-E(X)E(Z)]+[E(YZ)-E(Y)E(Z)]\\&=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)\end{aligned}$$ 例 3.4.7 若二维随机变量(X,Y)的联合分布函数如下； $$P(x,y)=\begin{cases}3x & 0<y<x<1\\0 & 其他\end{cases}$$ 求$Cov(X,Y)$ 解：$E(X)=\int_0^1(\int_0^x x3xdy)\,dx=\int_0^1 3x^3\,dx=\frac{3}{4}$ $$E(y)=\int_0^1(\int_0^x y3xdy)\,dx=\int_0^1\frac{3}{2}x^3\,dx=\frac{3}{8}$$ $$E(XY)=\int_0^1(\int_0^x xy3xdy)\,dx=\int_0^1\frac{3}{2}x^4\,dx=\frac{3}{10}$$ 于是 $$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=E(XY)-E(X)E(Y)\\&=\frac{3}{10}-\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{160}>0\end{aligned}$$ 例 3.4.8 二维随机变量(X,Y)的联合分布函数如下； $$P(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x+y) & 0<x<1,\quad 0<y<2\\0 & 其他\end{cases}$$ 求$Var(2X-3Y+8)$ 解：$Var(2X-3Y+8)=Var(2X-3Y)$ $=4Var(X)+9Var(Y)-12Cov(X,Y)$

教学流程	先计算边际密度 $P_X(x)=\int_0^2\frac{1}{3}(x+y)dy=\frac{2}{3}(x+1)\qquad 0<x<1$ $P_Y(y)=\int_0^1\frac{1}{3}(x+y)dx=\frac{1}{3}(y+\frac{1}{2})\qquad 0<y<2$ 再计算一阶矩，二阶矩。 $E(X)=\int_0^1 xP_X(x)dx=\int_0^1\frac{2}{3}x(x+1)dx=\frac{5}{9}$ $E(X^2)=\int_0^1 x^2P_X(x)dx=\int_0^1\frac{2}{3}x^2(x+1)dx=\frac{7}{18}$ $E(Y)=\int_0^2 yP_Y(y)dy=\int_0^2\frac{1}{3}y(y+\frac{1}{2})dy=\frac{11}{9}$ $E(Y^2)=\int_0^2 y^2P_Y(y)dy=\int_0^2\frac{1}{3}y^2(y+\frac{1}{2})dy=\frac{16}{9}$ $E(XY)=\int_0^1\int_0^2 xyP(x,y)dydx=\frac{1}{3}\int_0^1(2x^2+\frac{8}{3}x)dx=\frac{2}{3}$ 则$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{7}{18}-\left(\frac{5}{9}\right)^2=\frac{13}{162}$ $Var(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{16}{9}-\left(\frac{11}{9}\right)^2=\frac{23}{81}$ $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\times\frac{11}{9}=-\frac{1}{81}$ 则 $Var(2X-3Y+8)=Var(2X-3Y)$ $=4Var(X)+9Var(Y)-12Cov(X,Y)$ $=4\times\frac{13}{162}+9\times\frac{23}{81}-12\times\left(-\frac{1}{81}\right)=\frac{245}{81}$ **3.4.4 相关系数** **定义;** $Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$ 称为X,Y的（线性）相关系数。 相关系数也可以看成标准变量的协方差。 $X^*=\frac{X-\mu_X}{\sigma_X},\qquad Y^*=\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$ 则； $Cov(X^*,Y^*)=Cov(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X},\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y})=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=Corr(X,Y)$ **引理 3.4.4.** （施瓦茨（Schwarz）不等式）对于任意二维随机变量(X,Y)，${\sigma_X}^2=Var(X)$，${\sigma_Y}^2=Var(Y)$存在，则有： $[Cov(X,Y)]^2\le\sigma_X^2\sigma_Y^2$ 证明：不妨设$\sigma_X^2>0$，因为$\sigma_X^2=0$的时候，不等式成立是显然的。

教学流程

对于函数$g(t)$

$g(t)=E[t(X-E(X))+(Y-E(Y))]^2\geq 0 \qquad \forall t\in R$

恒成立，故

$$\varDelta=b^2-4ac=[2Cov(X,Y)]^2-4\sigma_X^2\sigma_Y^2\leq 0$$

即 $[Cov(X,Y)]^2\leq\sigma_X^2\sigma_Y^2$成立。

性质 3.4.11 $-1\leq Corr(X,Y)\leq 1$，或$|Corr(X,Y)|\leq 1$。

性质 3.4.12 $Corr(X,Y)=\pm 1$ 的充要条件是X,Y几乎处处有线性关系，即$P(Y=aX+b)=1 \qquad a\neq 0$

证明：充分性证明。若$Y=aX+b \qquad a\neq 0$，则

$Var(Y)=a^2Var(X)$，$Cov(X,Y)=aCov(X,X)=aVar(X)$

于是

$$Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{aVar(X)}{|a|Var(X)}=\begin{cases}1 & a>0\\ -1 & a<0\end{cases}$$

必要性证明.

$Var(\frac{X}{\sigma_X}\pm\frac{Y}{\sigma_Y})=2[1\pm Corr(X,Y)]$

当$Corr(X,Y)=1$ 时，有

$Var(\frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y})=0$

由此得$P(\frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y}=C)=1$

即$P(Y=\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X-c\sigma_Y)=1$

故当$Corr(X,Y)=1$ 时，X,Y几乎处处线性正相关。

当$Corr(X,Y)=-1$ 时，有

$$Var(\frac{X}{\sigma_X}+\frac{Y}{\sigma_Y})=0$$

由此得$P(\frac{X}{\sigma_X}+\frac{Y}{\sigma_Y}=C)=1$

即$P(Y=-\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X+c\sigma_Y)=1$

故当$Corr(X,Y)=-1$ 时，X,Y几乎处处线性负相关。

总结（1）当$Corr(X,Y)=0$ 时，则称X,Y不相关，即 X,Y之间没有线性关系

（1） 当$Corr(X,Y)=1$ 时，则称X,Y完全正线性正相关。

当$Corr(X,Y)=-1$ 时，则称X,Y完全正线性负相关。

（2） 当$|Corr(X,Y)|$越接近 1，线性相关程度越高。

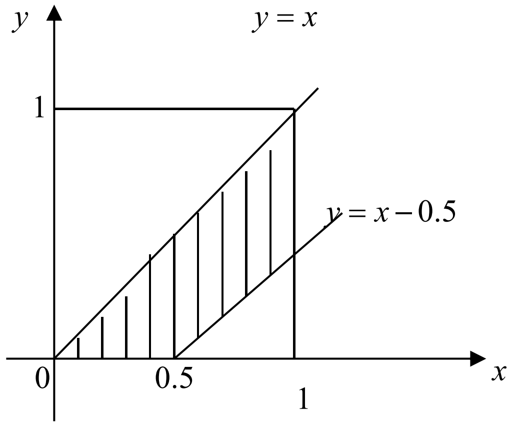
当$|Corr(X,Y)|$越接近 0，线性相关程度越底。

例 3.4.10 二维随机变量(X,Y)的联合分布函数如下；

$$P(x,y)=\begin{cases}\frac{8}{3} & 0<x-y<0.5,\quad 0<x,y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

求X,Y的相关系数$Corr(X,Y)$。

教学流程



解;先计算边际密度

$$P_X(x) = \begin{cases} 8x/3 & 0 < x < 0.5 \\ 4/3 & 0.5 < x < 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

$$P_Y(y) = \begin{cases} 4/3 & 0 < y < 0.5 \\ 8/3\,(1-y) & 0.5 < y < 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xP_X(x)dx = \int_0^{0.5} \frac{8}{3}x^2dx + \int_{0.5}^{1} \frac{4}{3}x\,dx = \frac{11}{18}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yP_Y(y)dy = \int_0^{0.5} \frac{4}{3}ydy + \int_{0.5}^{1} \frac{8}{3}y(1-y)\,dy = \frac{17}{18}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2P_X(x)dx = \int_0^{0.5} \frac{8}{3}x^3dx + \int_{0.5}^{1} \frac{4}{3}x^2\,dx = \frac{31}{72}$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2P_Y(y)dy = \int_0^{0.5} \frac{4}{3}y^2dy + \int_{0.5}^{1} \frac{8}{3}y^2(1-y)\,dy = \frac{15}{72}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{37}{648}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{37}{648}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyP(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^{0.5}\int_0^{x} \frac{8}{3}xydydx + \int_{0.5}^{1}\int_{x-0.5}^{x} \frac{8}{3}xydydx$$

$$= \int_0^{0.5} \frac{4}{3}x^3dx + \int_{0.5}^{1} \frac{4}{3}x(x-\frac{1}{4})dx = \frac{41}{144}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \frac{41}{144} - \frac{11}{18} \times \frac{7}{18} = \frac{61}{1296} = 0.0471$$

教学流程	$$Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{61}{1296}\times\frac{648}{37}=\frac{74}{61}=0.8243$$ 例 3.4.11 设有一笔资金，总量为 1 如今投资甲乙两种证券，投x_1给甲，投 $1-x_1=x_2$给乙，于是(x_1,x_2)形成一个投资组合，X,Y分别为甲乙的收益率，均值分别为μ_1,μ_2（代表平均收益），方差分别为σ_1,σ_2（代表风险）。X,Y的相关系数为 ρ，求组合的平均收益与风险（方差）。并求使得投资风险最小的x_1。 解;组合的收益为 $$Z=x_1X+(1-x_1)Y$$ 组合的平均收益为 $$E(Z)=x_1E(X)+(1-x_1)E(Y)$$ $$=x_1\mu_1+(1-x_1)\mu_2$$ 组合的风险（方差）为 $$Var(Z)=Var\{x_1X+(1-x_1)Y\}$$ $$={x_1}^2Var(X)+(1-x_1)^2Var(Y)+2x_1(1-x_1)Cov(X,Y)$$ $=x_1^2\sigma_1^2+(1-x_1)^2\sigma_2^2+2x_1(1-x_1)\rho\sigma_1\sigma_2$要使得$Var(Z)$最小， 必须 $\frac{d(Var(Z))}{dx_1}=2x\sigma_1^2-2(1-x_1)\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2-4x_1\rho\sigma_1\sigma_2=0$ 解得: $x_1^*=\frac{\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}$ 此时风险最小。
教学后记	1.不能灵活理解三大抽样分布的构造，遇到变形不能识别。 2.三大抽样分布定理要强调，区间估计的枢轴量和假设检验的统计量都要用到。

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第三章 多维随机变量及其分布</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>3.5 条件分布和条件期望</td><td>时间</td><td colspan="2">年 月 日第 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：掌握条件分布的计算，条件期望的计算，了解重期望公式。
能力目标：培养学生类比推导能力。
素质目标（价值观目标）：培养学生要用联系发展眼光看问题。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：条件分布的计算，条件期望的计算
难点：重期望公式。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">学生回顾条件概率计算。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线下</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">3.5:,3,5,6</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1] 陈希孺.《概率论与数理统计》.北京:科学出版社，2002.
[2] 吴传生等.《概率论与数理统计》（第三版）. 北京:高等教育出版社，2015.
[3] 盛骤，谢式千，潘承毅.《概率论与数理统计》.北京：高等教育出版，2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程	思政导入：我国公安部门用条件期望公式研究获得中国成年人的足长和身高的关系式，可以为破案起到重要作用。“天网恢恢，疏而不漏”，大家要遵纪守法。 **3.5.1 条件分布** **一．离散随机变量的条件分布的定义：** $P_{i/j}=P(X{=}x_i/Y{=}y_j)$ $$=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{P_{ij}}{P_{\bullet j}}$$ $i=1,2\cdots,j=1,2,\cdots.$ **例 3.5.2** 设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$，在已知$X+Y=n$的条件下，求X的分布。 解：由条件概率的定义，得： $$P(X=k\big/X+Y=n)=\frac{P(X=k,X+Y=n)}{P(X+Y=n)}$$ $$=\frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)}$$ $$=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\bullet\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}$$ $$=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)}$$ $$=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$ $k=0,1,2,\cdots,n$ **例 3.5.3** 设进入商店的顾客人数为X，且$X\sim P(\lambda)$，每个顾客购买某商品的概率为 P，顾客购物相互独立，求购物顾客人数 Y 的分布列。 解：由题意得：$P(X=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$，$\quad m=0,1,2\cdots,n$ $P(Y{=}k/X{=}m)=\binom{m}{k}P^k(1-p)^{m-k},k=0,1,\cdots,m$ 由全概率公式得： $$P(Y=k)=\sum_{m=k}^{\infty}P(X=m)P(Y=k/X=m)$$

教学流程

$$=\sum_{m=k}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\bullet\frac{m!}{k!\,(m-k)!}P^k(1-p)^{m-k}$$

$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda P)^k}{k!}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda]^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$=\frac{(\lambda P)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-P)}$$

$$=\frac{(\lambda P)^k}{k!}e^{-\lambda P},\quad k=0,1,2,\cdots$$

即$Y\sim P(\lambda p)$

二．连续随机变量的条件分布的定义：

$$F(x/y)=P(X\le x/Y=y)$$

$$=\lim_{h\to 0}P(X\le x/y\le Y\le y+h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{P(X\le x,y\le Y\le y+h)}{P(y\le Y\le y+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\{\int_{y}^{y+h}P(u,v)dv\}du}{\int_{y}^{y+h}P_Y(v)\,dv}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\{\frac{1}{h}\int_{y}^{y+h}P(u,v)\,dv\}\,du}{\frac{1}{h}\int_{y}^{y+h}P_Y(v)\,dv}=\int_{-\infty}^{x}\frac{P(u,y)}{P_Y(y)}du$$

则$P(x/y)=\frac{dF(x/y)}{dx}=\frac{P(x,y)}{P_Y(y)}$

类似的$P(y/x)=\frac{dF(x)}{dy}=\frac{P(x,y)}{P_X(x)}$

例 3.5.5 设(X,Y)服从$G=\{(x,y);x^2+y^2\le 1\}$上的均匀分布，求$P(y/x)$

解：$P(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$P_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

所以

$$P(x/y)=\frac{P(x,y)}{P_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{1-y^2} & -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\\ 0 & 其他\end{cases}$$

三．连续场合的全概率公式和贝叶斯公式

$$P(x,y)=P_X(x)P(y/x)$$

$$P(x,y)=P_Y(y)P(x/y)$$

教学流程	$P_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(x) P(y/x)\, dx$ $P_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(x) P(y/x)\, dx$ $P(x/y) = \frac{P_X(x)P(y/x)}{\int_{-\infty}^{\infty} P_X(x)P(y/x)\,dx}$ $P(y/x) = \frac{P_X(y)P(x/y)}{\int_{-\infty}^{\infty} P_Y(y)P(x/y)\,dy}$ **3.5.2 条件数学期望** $E(X/Y=y) = \begin{cases} \sum_i x_i P(X=x_i/Y=y) & (X,Y)\text{为二维离散随机变量} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xP(x/y)dx & (X,Y)\text{为二维连续随机变量} \end{cases}$ $E(Y/X=x)$ $= \begin{cases} \sum_i y_i P(Y=y_i/X=x) & (X,Y)\text{为二维离散随机变量} \\ \int_{-\infty}^{\infty} yP(y/x)dy & (X,Y)\text{为二维连续随机变量} \end{cases}$ **定理 3.5.1 （重期望公式）** 设(X,Y)是二维随机变量，且$E(X)$存在，则 $E(X) = E(E(X/Y))$ 证明：仅证明连续的情况，离散的类似证明。 记$g(y) = E(X/Y)$ 则 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xP(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} xP(x/y)P_Y(y)dx)\,dy$ $= \int_{-\infty}^{\infty} \{\int_{-\infty}^{\infty} xP(x/y)dx\} P_Y(y)dy$ $= \int_{-\infty}^{\infty} E(X/Y)P_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)P_Y(y)dy$ $= E(g(y)) = E(E(X/Y))$ **重期望公式的应用形式** $$E(X) = E(E(X/Y)) = \sum_j E(X/Y=y_j)P(Y=y_j)$$ （离散的情形） $$E(X) = E(E(X/Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X/Y=y)P_Y(y)dy$$ （连续的情形） **例 3.5.7：**一矿工被困在有三个门得矿井，第一个门通一坑道，沿此坑道 3 小时抵达安全区，，第二个门通一个坑道，5 小时返回原处，第三个门通一个坑道，7 小时可返回原处，求矿工平均多少小时到达安全区。

教学流程	解：假设X为矿工到达安全区的需要的时间，Y为第一次选择的门，则 由于第一个门 3 小时到达安全区，所以 $E(X/Y=1)=3$ 由于第二个门 5 小时返回原处，所以 $E(X/Y=2)=5+E(X)$ 由于第三个门 7 小时返回原处，所以 $E(X/Y=3)=7+E(X)$ 又$P(Y=1)=P(Y=2)=P(Y=3)$ 所以 $$E(X)=E(E(X/Y))=\sum_j E(X/Y=y_j)P(Y=y_j)$$ $$=\frac{1}{3}[3+5+E(X)+7+E(X)]=5+\frac{2}{3}E(X)$$ 即$E(X)=15$ 所以矿工平均要 15 小时才能到达安全区。 (思政：煤矿工人的辛苦，作为高危职业，在坑底作业，尊重劳动人民，珍惜劳动成果，讲述李克强总理在坑口接工作人员的事迹，培养爱党爱国精神。) **例 3.5.9** 设电力公司每月供应某工厂的电力X服从（10, 30）的均匀分布（单位 10^4kw），而实际需要的电力Y服从（10, 20） 的均匀分布（单位 10^4kw），如果电力足够，则每 10^4kw电可以创造 30 万元的利润，如果电力不足，则每 10^4kw电力只有 10 万的利润，求该厂每个月的平均利润。 解；设每个月的利润为Z万元，则 $$Z=\begin{cases}30Y & 当Y\le X\\ 30X+10(Y-X) & 当Y>X\end{cases}$$ 当 $10\le x<20$ 时 $$E(Z/X=x)=\int_{10}^{x}30yP_Y(y)dy+\int_{x}^{20}(10y+20x)P_Y(y)dy$$ $$=\int_{10}^{x}30y\frac{1}{10}dy+\int_{x}^{20}(10y+20x)\frac{1}{10}dy$$ $$=\frac{3}{2}(x^2-100)+\frac{1}{2}(20^2-x^2)+2x(20-x)$$ $$=50+40x-x^2$$ 当 $20\le x<30$ 时 $E(Z/X=x)=\int_{10}^{20}30yP_Y(y)dy=\int_{10}^{20}30y\frac{1}{10}dy=450$ 则

教学流程	$E(Z)=E(E(Z/X))$ $=\int_{10}^{20}E(Z/X=x)P_X(x)dx+\int_{20}^{30}E(Z/X=x)P_X(x)dx$ $=\frac{1}{20}\int_{10}^{20}(50+40x-x^2)dx+\frac{1}{20}\int_{x}^{20}450dy$ $=25+300-\frac{700}{6}+225\approx 433$ 所以该厂的平均利润为 433 万元。 **例 3.5.10 （随机变量和的数学期望）** 设$X_1,X_2,\cdots$为独立的随机变量序列，整数N与$\{X_n\}$独立，证明： $E(\sum_{i=1}^{N}X_i)=E(X_1)E(N)$ 证明：$E(\sum_{i=1}^{N}X_i)=E[E(\sum_{i=1}^{N}X_i/N)]$ $=\sum_{n=1}^{\infty}E(\sum_{i=1}^{N}X_i\Big/N=n)P(N=n)$ $=\sum_{n=1}^{\infty}E(\sum_{i=1}^{n}X_i)P(N=n)$ $=\sum_{n=1}^{\infty}nE(X_1)P(N=n)$ $=E(X_1)\sum_{n=1}^{\infty}nP(N=n)$ $=E(X_1)E(N)$ **应用** （1） 设 N 为一天到商场的顾客数是一个随机变量，且$E(N)=35000$。设X_i为第 i 个顾客的购物金额，且X_i是独立同分布的，$E(X_i)=82(元)$，假设N与X_i相互独立，则此商场一天的平均营业额为 $E(\sum_{i=1}^{N}X_i)=E(X_1)E(N)=82\times 35000=287(万元)$ $其中X_0=0$ （2） 一只昆虫产卵数N服从参数为λ的泊松分布，每个卵成活的概率为P，这里$X_i\sim 0-1$ 分布，而X_i表示第 i 个卵成活，

教 学 流 程	则一只昆虫产卵后的平均成活卵数为 $E(\sum_{i=1}^{N} X_i) = E(X_1)E(N) = \lambda P$
教　学 后　记	1. 全概率公式和贝叶斯公式要结合概率形式的类比迁移。 2. 要让学生先自己总结条件分布和条件期望的计算以强化理解。

章节（单元）教案

要　素	内　容				
章节名称	第四章 大数定律和中心极限定理		教学时数		2
单元内容	4.1 随机变量序列的两种收敛性	时间	年　月 日第 节		
教学目标	知识目标：了解两种收敛性的定义。 能力目标：培养学生计算能力和类比迁移能力。 素质目标（价值观目标）：培养学生不畏挫折百折不挠的奋斗精神。				
重点难点	重点：两种收敛性的定义 难点：两种收敛性的定义				
教学要求	学生回顾数列极限定义和函数收敛的定义。				
教学方法	课堂讲授				
授课方式	线下				
练　习 作　业	4.1:2,3				
参　考 资　料	[1] 陈希孺.《概率论与数理统计》.北京:科学出版社，2002. [2] 吴传生等.《概率论与数理统计》（第三版）. 北京:高等教育出版社，2015. [3] 盛骤，谢式千，潘承毅.《概率论与数理统计》.北京：高等教育出版，2008.				

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>

思政导入：某事件发生的频率依概率收敛于该事件发生的概率，是金子总会发光，便说明了这个道理，可以使学生认识到，只要自己具有才能靠着自身的努力，脚踏实地认真做事，就一定会被发掘发光发热。

4.1 两种收敛性

定义 4.1.1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是一个随机变量序列，a 为一个常数，若对于任意正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1$，则称序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 依概率收敛于 a，记作 $X_n \xrightarrow{P} a \quad (n \to \infty)$.

$X_n \xrightarrow{P} a$ **的直观解释是：**对任意 $\varepsilon > 0$，当 n 充分大时，“X_n 与 a 的偏差大于等于 ε”这一事件 $\{|X_n - \mu| \geq \varepsilon\}$ 发生的概率很小（收敛于 0），这里的收敛性是在概率意义上的收敛性。这就是说，不论给定怎样小的 $\varepsilon > 0$，X_n 与 a 的偏差大于等于 ε 是可能的，但是当 n 很大时，出现这种偏差的可能性很小，因此，当 n 很大时，事件 $\{|X_n - \mu| < \varepsilon\}$ 几乎是必然要发生的，这与高等数学中的序列收敛概念是不同的。

依概率收敛的序列有如下性质：

设 $X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b$, 又设函数 $g(x,y)$ 在点 (a,b) 连续,

则 $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a,b)$.

特别有：

定理 4.1.1 设 $\{X_n\}, \{Y_n\}$ 是两个随机变量序列，a, b 是两个常数. 如果 $X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b$, 则有

（1） $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} a \pm b$；

（2） $X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \times b$；

</td>
</tr>
</table>

教学流程

（3） $X_n \div Y_n \xrightarrow{P} a \div b\ (b \neq 0)$.

定义 4.1.2 设随机变量 X, X1, X2,…的分布函数分别为 F(x), F1(x), F2(x), …，若对 F(x)的任意连续点 x，都有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

则称{F(x)}弱收敛于 F(x)，记作 $F_n(x) \xrightarrow{W} F(x).$

也称{Xn}按分布收敛于 X，记作 $X_n \xrightarrow{L\text{ 或 }d} X.$

从上面的分析知道：

点点收敛比按分布收敛要求更强。其实，依概率收敛也比按分布收敛要求更强。

定理 4.1.2 $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X.$

证明思路：欲证 $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} a.$

只需证明：$\varphi_{Y_n}(t) \to \varphi_a(t).$

定理 4.1.3 若 c 为常数，则 $X_n \xrightarrow{P} c$ 的充要条件是：

$X_n \xrightarrow{L} c.$

证明：必要性已由定理 4.1.2 给出，下面证明充分性.

记 X_n 的分布函数为 $F_n(x), n = 1, 2, \cdots$ ，因为常数 c 的分布函数（退化分布）为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ 1, & x \geq c. \end{cases}$$

所以对任意的 $\varepsilon > 0$ ，有

$$P(|X_n - c| \geq \varepsilon) = P(X_n \geq c + \varepsilon) + P(X_n \leq c - \varepsilon)$$

$$\leq P(X_n > c + \frac{\varepsilon}{2}) + P(X_n \leq c - \varepsilon)$$

$$= 1 - F_n(c + \frac{\varepsilon}{2}) + F_n(c - \varepsilon)$$

教学流程	由于 $x=c+\frac{\varepsilon}{2}$ 和 $x=c-\varepsilon$ 都是 $F(x)$ 的连续点，且 $F_n(x)\xrightarrow{w}F(x)$，所以当 $n\to\infty$ 时有 $$F_n(c+\frac{\varepsilon}{2})\to F(c+\frac{\varepsilon}{2})=1,\quad F_n(c-\varepsilon)\to F(c-\varepsilon)=0.$$ 由此得 $$P(\mid X_n-c\mid\geq\varepsilon)\to 0.$$ 即 $X_n\xrightarrow{P}c$. 证毕.
教学后记	1. 结合数列收敛定义强化依概率收敛的特点。 2. 强调点点收敛和弱收敛的区别。

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要 素</td><td colspan="4">内 容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第四章 大数定律和中心极限定理</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>4.2 特征函数</td><td>时间</td><td colspan="2">年 月 日第 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：熟练掌握特征函数的计算，了解特征函数的性质。
能力目标：培养学生转化变通能力和推导证明能力。
素质目标（价值观目标）：培养学生不懈努力，不断攀岩的数学精神。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：特征函数的计算
难点：特征函数的性质</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">学生复习期望和常见分布。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线下</td></tr>
<tr><td>练 习
作 业</td><td colspan="4">4.2:1,2</td></tr>
<tr><td>参 考
资 料</td><td colspan="4">[1] 陈希孺.《概率论与数理统计》.北京:科学出版社，2002.
[2] 吴传生等.《概率论与数理统计》（第三版）. 北京:高等教育出版社，2015.
[3] 盛骤，谢式千，潘承毅.《概率论与数理统计》.北京：高等教育出版，2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程

思政导入：让我们先看看为什么会有傅立叶变换？傅立叶是一位法国数学家和物理学家的名字，英语原名是 Jean Baptiste Joseph Fourier(1768-1830)，Fourier 对热传递很感兴趣，于 1807 年在法国科学学会上发表了一篇论文，运用正弦曲线来描述温度分布，论文里有个在当时具有争议性的决断：任何连续周期信号可以由一组适当的正弦曲线组合而成。当时审查这个论文的人，其中有两位是历史上著名的数学家拉格朗日(Joseph Louis Lagrange, 1736-1813)和拉普拉斯(Pierre Simon de Laplace, 1749-1827)，当拉普拉斯和其它审查者投票通过并要发表这个论文时，拉格朗日坚决反对，在他此后生命的六年中，拉格朗日坚持认为傅立叶的方法无法表示带有棱角的信号，如在方波中出现非连续变化斜率。法国科学学会屈服于拉格朗日的威望，拒绝了傅立叶的工作，幸运的是，傅立叶还有其它事情可忙，他参加了政治运动，随拿破仑远征埃及，法国大革命后因会被推上断头台而一直在逃避。直到拉格朗日死后 15 年这个论文才被发表出来。

谁是对的呢？拉格朗日是对的：正弦曲线无法组合成一个带有棱角的信号。但是，我们可以用正弦曲线来非常逼近地表示它，逼近到两种表示方法不存在能量差别，基于此，傅立叶是对的。

定义 4.2.1 设 X 是一个随机变量，称

$$\varphi_X(t)=E(e^{itX})=\begin{cases}\overset{\text{离}}{=\!=}\sum_i e^{itx_i}p_i\\ \overset{\text{连}}{=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p(x)dx\end{cases}$$

为 X 的特征函数.

由于任给一个 X，有|eitX|=|cos tX+isin tX| 1，所以 E(eitX)总是存在的.即任意随机变量的特征函数总是存在的.

（1）单点分布： P(X=a)=1

(t)=E(eitX)=eita

（2）0-1 分布 X~ b(1,p)

P(X=k)=pkq1-k (k=0,1,)

(t)=E(eitX)=peit+q.

（3） 泊松分布 X

$$\varphi(t)=E(e^{itX})\ =e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

（4）均匀分布 X~ U(a,b)

$$\varphi(t)=E(e^{itX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p(x)dx\ =\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}.$$

教学流程	（5）标准正态分布 X~ N(0, 1) $$\varphi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$ （6）指数分布 $$\varphi(t)=E(e^{itX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p(x)dx=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$$ （7）二项分布 b(n,p) $$\varphi_Y(t)=(pe^{it}+q)^n$$ （8）正态分布 $\varphi_Y(t)=e^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$ 定理 4.2.1（一致连续） 随机变量 X 的特征函数 (t)在 R 上一致连续。 定理 4.2.2（非负定性） 随机变量 X 的特征函数 (t)是非负定的，即对(i=1,2,…,n)有 $$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(t_k-t_j)z_k\bar{z}_j\geq 0$$ 4.2.3 特征函数唯一决定分布函数 定理 4.2.3（逆转公式） 设 F(x)， (t)分别是随机变量 X 的分布函数和特征函数，则对 F(x)的任意两个连续点 x1< x2，有 $$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)\,dt$$ $$\overset{\text{即}}{=\!=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)dt$$ 定理 4.2.4（唯一性定理） 随机变量的分布函数由其特征函数唯一决定。
教学后记	1.特征函数计算本质是求期望，所以期望的学习计算要加强。 2.特征函数计算时学生混淆积分变量和自变量，所以要多加强调。

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第四章 大数定律和中心极限定理</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>4.3 大数定律（1）</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　日第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：熟练掌握几个大数定律，并能应用。
能力目标：培养学生归纳总结能力和推导证明能力。
素质目标（价值观目标）：培养学生不懈努力，不断攀岩的数学精神。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：几个大数定律
难点：几个大数定律</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">学生复习依概率收敛。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线下</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">4.3:1,2,3,5</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1] 陈希孺.《概率论与数理统计》.北京:科学出版社，2002.
[2] 吴传生等.《概率论与数理统计》（第三版）. 北京:高等教育出版社，2015.
[3] 盛骤，谢式千，潘承毅.《概率论与数理统计》.北京：高等教育出版，2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程	思政导入：伯努利是第一个研究这一问题的数学家，他于1713年首先提出后人称之为“大数定律”的极限定理。后来泊松、切比雪夫、马尔科夫、格涅坚科等众多的数学家都有重大成就，弱大数定律的研究已经趋于完善，最好的结果是属于格涅坚科，他找到了弱大数定律成立的充要条件，而且没有任何独立性或同分布的要求。在二十世纪初，博雷尔引入测度论的方法之后，将伯努利大数定理推广到强大数定律开创了强大数定律的研究，之后工作最有成就的属于柯尔莫哥洛夫，他不但完成了概率的公理化，还找到了独立同分布下的强大数定律的充要条件。如今，对强大数定律的研究仍然是难题，数学家们在向着不独立随机变量序列服从强大数定律的条件努力。 **伯努利大数定理：** **定理 4.3.1** 设μ_n为n重伯努利实验中事件A发生的次数，P为每次实验A出现的概率吗，则对于$\forall\varepsilon>0$,有 $$\lim_{n\to+\infty}\left\{\left\|\frac{\mu_n}{n}-p\right\|<\varepsilon\right\}=1$$ 证明：由于 $\mu_n\sim b(n,p)$，且 $$E\left(\mu_n/n\right)=P,\qquad Var\left(\mu_n/n\right)=\frac{P(1-P)}{n}$$ 由切比雪夫不等式 $$1\ge P\{\|\mu_n/n-P\|<\varepsilon\}\ge 1-\frac{Var\left(\frac{\mu_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}=1-\frac{P(1-P)}{n\varepsilon^2}$$ 当$n\to+\infty$时，有 $$\lim_{n\to+\infty}P\{\|\mu_n/n-P\|<\varepsilon\}=1$$ （思政：随机现象具有偶然性一面，也有必然性一面，偶然性表现在对随机现象做一次观测，观测结果具有不可预知性，必然性表现在对随机现象进行大量重复观测，观测结果有一定的统计规律性，这个规律实际上就是大数定律。在这个偶然向必然的转变过程中，蕴含着朴素的唯物主义观点，正如荀子的开篇之作，劝说中所说，“不积跬步，无以至千里，不积小流，无以成江海。”教育学生每个人的生活都是一件小事组成的，只有先养小德，才能成就大德。） **切比雪夫大数定理** **定理 4.3.2** 设$\{X_n\}$为一列两两不相关的随机变量序列，每个

教学流程	$Var(X_i)$存在，切$Var(X_i) \le C, i=1,2,,3\cdots$则
教学后记	1. 要比较总结几个大数定律的使用条件，以免混淆。 2. 大数定律形式多变，但要掌握一般形式。

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1$$

证明:因为$\{X_n\}$为一列两两不相关的随机变量序列，故

$$Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)\le\frac{c}{n}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}$$

$$\ge 1-\frac{Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{\varepsilon^2}\ge 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}$$

当$n\to+\infty$时，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

特别的有当$\{X_n\}$同分布时，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

（思政：切比雪夫的左脚生来有残疾，且在俄罗斯数学教学缺乏教材，缺少数学大家等一系列较差条件的历史背景下从事他的数学创造，最终形成了令世界瞩目的数学学派，从而使俄罗斯数学走在了世界前列。）

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第四章 大数定律和中心极限定理</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>4.3 大数定律（2）</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月 日第 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：熟练掌握几个大数定律，并能应用。
能力目标：培养学生归纳总结能力和推导证明能力。
素质目标（价值观目标）：培养学生不懈努力，不断攀岩的数学精神。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：几个大数定律
难点：几个大数定律</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">学生复习依概率收敛。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线下</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">4.3:1,2,3,5</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1] 陈希孺.《概率论与数理统计》.北京:科学出版社，2002.
[2] 吴传生等.《概率论与数理统计》（第三版）. 北京:高等教育出版社，2015.
[3] 盛骤，谢式千，潘承毅.《概率论与数理统计》.北京：高等教育出版，2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程

思政导入： 大数定律应用非常广泛，大数据时代的云存储方法，激励学生好好学习专业知识，为国家解决一些“卡脖子”问题，贡献自己微小力量。

定理(马尔可夫 Markov 大数定律)：

对随机变量序列$\{X_n\}$，若下式成立，

$$\frac{1}{n^2}Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)\to 0,$$

则$\{X_n\}$服从大数定理.

例 1. 在伯努利试验中，随机事件A出现的概率为p，令

$$X_n=\begin{cases}1, & \text{若在第}n\text{次及第}n+1\text{次试验中}A\text{都出现},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明$\{X_n\}$服从大数定律.

证明: $E(X_n)=E(X_n^2)=p^2$， $\mathrm{Var}(X_n)=p^2(1-p^2)\le 1$，

又当$|i-j|\ge 2$时，X_i与X_j独立，

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Cov}(X_i,X_{i+1})]$$

又因为

$$|\mathrm{Cov}(X_i,X_{i+1})|\le\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}\sqrt{\mathrm{Var}(X_{i+1})}=p^2(1-p^2),$$

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}X_i)\le\frac{1}{n^2}[np^2(1-p^2)+2(n-1)p^2(1-p^2)]\to 0\ (n\to\infty),$$

即马尔可夫条件成立，故$\{X_n\}$服从大数定律。

例 2. 设$\{X_n\}$为独立随机变量序列，且

$$P(X_k=\pm\sqrt{\ln k})=\frac{1}{2},k=1,2,\cdots$$

证明$\{X_n\}$服从大数定律.

<table>
<tr><td>教
学
流
程</td><td>

证明：$E(X_k)=0$， $\mathrm{Var}(X_k)=\ln k$.

因为$X_1,X_2,\cdots$相互独立， 所以

$$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}\ln k\le n\times\ln n,$$

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}X_i)\le\frac{\ln n}{n}\to 0\ \ (n\to\infty)$$

即马尔可夫条件成立，故$\{X_n\}$服从大数定律。

定理(辛钦 Khintchine 大数定律)：

设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立，服从同一分布，且具有数学期望$E(X_i)=\mu,i=1,2,\cdots$，则对任意给定的正数$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

注：(1) 定理不要求随机变量的方差存在；

(2) 伯努利大数定律是辛钦大数定律的特殊情况；

(3) 辛钦大数定律为寻找随机变量的期望值提供了一条实际可行的途径．例如，要估计某地区的平均亩产量，可收割某些有代表性的地块，如n块，计算其平均亩产量，则当n较大时，可用它作为整个地区平均亩产量的一个估计．此类做法在实际应用中具有重要意义.

</td></tr>
<tr><td>教　学
后　记</td><td>1. 要比较总结几个大数定律的使用条件，以免混淆。
2. 大数定律形式多变，但要掌握一般形式。</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

要　素	内　容				
章节名称	第四章 大数定律和中心极限定理			教学时数	2
单元内容	4.4 中心极限定理（1）	时间	年　月 日第 节		
教学目标	知识目标：理解中心极限定理的作用，并掌握几个中心极限定理。 能力目标：培养学生推导证明能力。 素质目标（价值观目标）：培养学生不断砖研的数学精神。				
重点难点	重点：独立同分布下的中心极限定理，二项分布的近似 难点：独立不同分布下的中心极限定理				
教学要求	学生复习正态分布和二项分布的相关计算。				
教学方法	课堂讲授				
授课方式	线下				
练　习 作　业	4.4:1，2,3,22,23				
参　考 资　料	[1] 陈希孺.《概率论与数理统计》.北京:科学出版社，2002. [2] 吴传生等.《概率论与数理统计》（第三版）. 北京:高等教育出版社，2015. [3] 盛骤，谢式千，潘承毅.《概率论与数理统计》.北京：高等教育出版，2008.				

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

教学流程

思政导入：1733 年，德莫佛—拉普拉斯在分布的极限定理方面走出了根本性的一步，证明了二项分布的极限分布是正态分布。拉普拉斯改进了他的证明并把二项分布推广为更一般的分布。1900 年，李雅普诺夫进一步推广了他们的结论，并创立了特征函数法。这类分布极限问题是当时概率论研究的中心问题，卜里耶为之命名“中心极限定理”。20 世纪初，主要探讨使中心极限定理成立的最广泛的条件，二三十年代的林德贝尔格条件和费勒条件是独立随机变量序列情形下的显著进展。

很多数学定理、公式都是以人名命名，在阐述概念的时候，融入数学家们孜孜不倦、不畏困难的历程故事，分享他们的求真精神，对学生的专业学习和良好三观培养和塑造有着很好的效果。

4.4 中心极限定理

引入 设X_n为独立同分布的随机变量，记

$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 则当$n\to+\infty$的时，Y_n的密度接近正态分布。

$$P_1(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$P_2(y)=\begin{cases}y & \text{当}0<y<1\\ 2-y & \text{当}1\le y<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$P_3(y)=\begin{cases}y^2/2 & \text{当}0<y<1\\ -(y-2/3)^2+3/4 & \text{当}1\le y<2\\ (y-3)^2/2 & \text{当}2\le y<3\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

教学流程

$$P_4(y)=\begin{cases} y^2/6 & 当\ 0<y<1 \\ \{y^3-4(y-1)^3\}/6 & 当\ 1\le y<2 \\ \{(4-y)^3-4(3-y)^3\}/6 & 当\ 2\le y<3 \\ (4-y)^3/6 & 当\ 3\le y<4 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

4.4 中心极限定理

定理 4.4.1(林德贝格-勒维中心极限定理)

设$\{X_n\}$为一列独立同分布随机变量序列，且$Var(X_i)=\delta^2$，$E(X_i)=\mu$，记

$Y_n^*=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\mu}{\delta\sqrt{n}}$ 则

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(Y_n^*\le y\right)=\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

定理 4.4.2(隶莫弗-拉普拉斯极限定理)

设 n 重伯努利实验中，事件 A 每次出现的概率为 P，记μ_n为 n 次试验中事件 A 出现的次数。记

$Y_n^*=\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}$ 则

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(Y_n^*\le y\right)=\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

P243 修正$P(k_1\le S_n\le k_2)=P(k_1-0.5<S_n<k_2+0.5)$

P244 例 4.4.5 一复杂系统由 100 个互相独立工作的部件组成，每

教学流程	个部件正常工作的概率为 0.9，已知整个系统至少有 85 个部件正常工作，系统才能正常，试求系统正常工作的概率。 解：设Y_n为 100 个部件中正常工作的的部件数， $Y_n \sim b(100,0.9)$，即$Y_n \sim$*正态分布* $$E(Y_n) = nP = 100 \times 0.9 = 90$$ $Var(Y_n) = npq = 100 \times 0.9 \times 0.1 = 9$ 则 $$\frac{Y_n - 90}{3} \sim N(0,1)$$ $$P(Y_n \geq 85) \approx P(Y_n > 85 - 0.5) = P(\frac{Y_n - 90}{3} > \frac{84.5 - 90}{3}) = 1 - P\left(\frac{Y_n - 90}{3} \leq -1.83\right) = 1 - \Phi(-1.83) = \Phi(1.83) = 0.966$$ 故系统正常工作的概率为 0.966. 修正$P(k_1 \leq S_n \leq k_2) = P(k_1 - 0.5 < S_n < k_2 + 0.5)$
教学后记	1. 要通过各种变形来掌握中心极限定理。 2. 要多做练习掌握的近似计算。

章节（单元）教案

<table>
<tr><th>要　素</th><th colspan="4">内　容</th></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第四章 大数定律和中心极限定理</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>4.4 中心极限定理（2）</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　日第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：理解中心极限定理的作用，并掌握几个中心极限定理。
能力目标：培养学生推导证明能力。
素质目标（价值观目标）：培养学生不断砖研的数学精神。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：独立同分布下的中心极限定理，二项分布的近似
难点：独立不同分布下的中心极限定理</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">学生复习正态分布和二项分布的相关计算。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线下</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">4.4:1，2,3,22,23</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">[1] 陈希孺.《概率论与数理统计》.北京:科学出版社，2002.
[2] 吴传生等.《概率论与数理统计》（第三版）. 北京:高等教育出版社，2015.
[3] 盛骤，谢式千，潘承毅.《概率论与数理统计》.北京：高等教育出版，2008.</td></tr>
</table>

注：一个教学单元是指一次理论课（2 学时）或者一个完整实验。

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>

思政导入：中心极限定理极限分布是正态分布，是量变引起质变的基本原理，引领同学们生活上勿以恶小而为之，勿以善小而不为，实现个人精神的锲而不舍、金石可镂。

例 4.4.6 某制药厂生产的某药品，对某种疾病的治愈率为 80%，现在为了检验此治愈率，任意抽取 100 个此种病得患者进行临床试验，如果至少有 75 人治愈，则此药品通过检验，分别在以下情况计算此药品通过检验的可能性。

（1） 此药品的实际治愈率为 80%。
（2） 此药品的实际治愈率为 70%。

解：设Y_n为 100 个临床受试者中治愈的人数，则

（1）$Y_n \sim b(100,0.8)$ $Y_n \sim 正态分布$

$$E(Y_n) = nP = 100 \times 0.8 = 80$$
$$Var(Y_n) = npq = 100 \times 0.8 \times 0.2 = 16$$

$$\frac{Y_n - 80}{4} \sim N(0,1)$$

$$P(Y_n \geq 75) = P(Y_n > 75 - 0.5)$$
$$= P(\frac{Y_n - 80}{4} > \frac{74.5 - 80}{4}) = 1 - P\left(\frac{Y_n - 80}{4} \leq -1.375\right)$$
$$= 1 - \Phi(-1.375) = \Phi(1.375) = 0.9155$$

（2）$Y_n \sim b(100,0.8)$ $Y_n \sim 正态分布$

$$E(Y_n) = nP = 100 \times 0.7 = 70$$
$$Var(Y_n) = npq = 100 \times 0.7 \times 0.3 = 21$$

$$\frac{Y_n - 70}{\sqrt{21}} \sim N(0,1)$$

$$P(Y_n \geq 75) = P(Y_n > 75 - 0.5)$$
$$= P(\frac{Y_n - 70}{\sqrt{21}} > \frac{74.5 - 70}{\sqrt{21}}) = 1 - P\left(\frac{Y_n - 70}{\sqrt{21}} \leq 0.982\right)$$
$$= 1 - \Phi(0.982) = 1 - 0.8370 = 0.1630$$

例 4.4.7 某车间有同型号的机床 200 台，一个小时内每台机床 70%

</td>
</tr>
</table>

的时间是工作的，各台机床工作是相互独立的，工作的时候每台机床消耗的电能为 15 千瓦（KW）. 问至少要多少电能才可以有 95%的可能性保证此车间生产正常。

解：设Y_n为 200 台机床中同时工作的机床数，供电量为 y 千瓦（kw）则电力需求量为 $15Y_n$为使工作正常，必须 $15Y_n \le y$ 则

$Y_n \sim b(200,0.7)$ $Y_n \sim 正态分布$

$$E(Y_n) = nP = 200 \times 0.7 = 140$$
$$Var(Y_n) = npq = 200 \times 0.7 \times 0.3 = 42$$

$$P(15Y_n \le y) = P(Y_n \le \frac{y}{15}) = P\left(Y_n \le \frac{y}{15} + 0.5\right)$$

$= P(\frac{Y_n-140}{\sqrt{42}} \le \frac{\frac{y}{15}+0.5-140}{\sqrt{42}}) = \Phi\left(\frac{y/15+0.5-140}{\sqrt{42}}\right) \ge 0.95$ 又$\Phi(1.645) = 0.95$

故$\frac{\frac{y}{15}+0.5-140}{\sqrt{42}} \ge 1.645$

解得；$y \ge 2252(kw)$

故至少要 2252（kw）才能有 95%的概率保证此车间正常工作。

例 4.4.8 某调查公司受委托，调查某电视节目在 S 市的收视率 P，调查公司将所有调查对象看此节目的的频率作为P的估计$\hat{P}$，现在要保证有 90%的把握，使得调查的收视率$\hat{P}$与真实的收视率P之间的差异不大于 5%。问至少要调查多少对象？

解：设共调查 n 个对象，记：

$$X_i = \begin{cases} 1 & 第i个调查对象在看此电视节目 \\ 0 & 第i个调查对象不看此电视节目 \end{cases}$$

则$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n,p)$　　则$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim 正态分布$

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = P$$

教学流程

教学流程	$$Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}pq$$ $\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-p}{\sqrt{\frac{1}{n}pq}}\sim N(0,1)$当$n\to+\infty$的时，有$\frac{Y_n}{n}\to p$由题意 $$P\left(\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-p\right\|<0.05\right)=P\left(\left\|\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-p}{\sqrt{pq/n}}\right\|<\frac{0.05}{\sqrt{pq/n}}\right)$$ $$=2\Phi\left(0.05\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-1\geq 0.90$$ $$\Phi\left(0.05\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\geq 0.95$$ $$而\Phi（1.645）=0.95$$ $$0.05\sqrt{\frac{n}{\mathrm{pq}}}\geq 1.645$$ 又$pq\leq\left(\frac{p+q}{2}\right)^2=0.25$，取$pq=0.25$ 解得$n\geq 270.6$ 故至少要调查 271 个对象。 **定理 4.4.4（李雅普洛夫中心极限定理）** 设$\{X_n\}$为独立的随机变量序列，若存在$\delta>0$，满足： $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{i=1}^{n}E\left(\|X_i-\mu_i\|^{2+\delta}\right)=0$$ 则对于任意的 x，有 $$\lim_{n\to+\infty}P\{\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)\leq x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

<table>
<tr><td>教学流程</td><td>
注意要点：李雅普洛夫定理的条件更宽松，对于$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$只要求独立，不需要同分布，$Y_n$的密度依然是正太密度。

例 4.4.9 一份试卷由 99 个题目组成，难度由易到难排列，某学生答对第 i 题的概率为$P_i = 1 - \frac{i}{100}$，答题是相互独立的，并且要答对 60 个以上的题才算通过考试，试计算学生通过考试的概率。

解：设
$$X_i = \begin{cases} 1 & 若学生答对第i题 \\ 0 & 若学生答错第i题 \end{cases}$$
$P(X_i = 1) = P_i = 1 - \frac{i}{100}$ $P(X_i = 0) = 1 - P_i = q_i = \frac{i}{100}$

则$\sum_{i=1}^{99} X_i \sim 正态分布$

又E（$\sum_{i=1}^{99} X_i$） $= \sum_{i=1}^{99} p_i = \sum_{i=1}^{99}\left(1 - \frac{i}{100}\right) = 49.5$
$$B_{99}^2 = （\sum_{i=1}^{99} Var(X_i)） = \sum_{i=1}^{99}\left((1 - \frac{i}{100})(\left(\frac{i}{100}\right))\right)$$
$$= 16.665 P\left(\sum_{i=1}^{99} X_i \geq 60\right)$$
$$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 49.5}{\sqrt{16.665}} \geq \frac{60 - 49.5}{\sqrt{16.665}}\right)$$
$$= 1 - \Phi(2.5735) = 0.005$$
故学生通过考试的概率为 0.005.
</td></tr>
<tr><td>教学后记</td><td>1. 要通过各种变形来掌握中心极限定理。
2. 要多做练习掌握的近似计算。</td></tr>
</table>