线性代数课程教案

二〇二三年

教案（扉页）

<table>
<tr><td>课程名称</td><td colspan="3">线性代数</td><td>总计：__40__学时</td></tr>
<tr><td>课程性质</td><td>公共必修课</td><td>学分</td><td></td><td>讲课：__40__学时
实验：__0__学时</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：通过该课程的学习，使学生掌握关于线性代数的行列式、矩阵、线性方程组、向量的线性关系、矩阵对角化及二次型等知识的基本概念、基本理论和基本方法。
能力目标：通过该课程的学习，提升学生的抽象思维能力、逻辑推理能力和运算能力；初步掌握处理线性关系的基本思想和方法；会用线性代数知识分析、解决线性模型中的实际问题的能力，为相关的后续课程的开设做好必要的知识储备。
素质目标（思政目标）：
1.通过本课程的学习培养学生良好的学习习惯、数学素养及思维严谨、工作务实的工作作风；
2.培养学生厚积薄发、实事求是、精益求精、一丝不苟和科学严谨的治学态度；
3.培养学生能够用联系的、全面的、发展的观点看问题，正确对待人生发展中的顺境与逆境，处理好人生发展中的各种矛盾，积极向上的人生态度。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">学生需具备初等数学知识和计算技能。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、启发式教学、案例教学等</td></tr>
<tr><td>教学手段</td><td colspan="4">板书、多媒体教学、线上线下混合式教学</td></tr>
<tr><td>考核方式</td><td colspan="4">闭卷</td></tr>
<tr><td>教学参考资　　料</td><td colspan="4">1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006
2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009
3.同济大学数学系. 工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社. 2013</td></tr>
<tr><td>备注</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">行列式　　　　内　容　n阶行列式的定义</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">§1.1 n阶行列式的定义</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>1.1.1 二阶与三阶行列式
1.1.2 排列与逆序
1.1.3 n阶行列式</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　日　第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标:理解二阶、三阶及n阶行列式的定义。
能力目标:掌握二阶、三阶行列式的对角线法则及n阶行列式的计算方法。
思政目标：通过对线性代数在各个领域中应用的简介，激发学生学习数学的热情，激发学生学习的主观能动性。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：n阶行列式的定义。
难点：用定义法计算n阶行列式。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">教师课前充分备课，了解学情；学生需要具备初等数学知识和计算技能。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、启发式教学、案例教学等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线上线下混合式教学</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">作业：习题一 1.（2）（3）　2. 3.（3）（4）
4.（2） 6. 7.(2) (3) (4)
思考：习题一（B）1.　2.</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006
2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009
3.同济大学数学系．工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社．2014</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

教学流程	导入： （思政内容：线性代数有什么用?这是每一个圈养在象牙塔里，在灌输式教学模式下的“被学习”的学生刚刚开始思考时的第一个问题.我稍微仔细的整理了一下学习线代的理由,竟然也罗列了不少,不知道能不能说服你： 1.如果你想顺利地拿到学位,线性代数的学分对你有帮助； 2.如果你想继续深造,考研,必须学好线代.因为它是必考的数学科目,也是研究生科目《矩阵论》、《泛函分析》的基础.例如,泛函分析的起点就是无穷多个未知量的无穷多线性方程组理论. 3.如果你想提高自己的科研能力,不被现代科技发展潮流所抛弃,也必须学好,因为瑞典的L.戈丁说过,没有掌握线代的人简直就是文盲.他在自己的数学名著《数学概观》中说： 要是没有线性代数,任何数学和初等教程都讲不下去.按照现行的国际标准,线性代数是通过公理化来表述的.它是第二代数学模型,其根源来自于欧几里得几何、解析几何以及线性方程组理论.…,如果不熟悉线性代数的概念,像线性性质、向量、线性空间、矩阵等等,要去学习自然科学,现在看来就和文盲差不多,甚至可能学习社会科学也是如此. 4.如果毕业后想找个好工作,也必须学好线代： (1)想搞数学,当个数学家（我靠,这个还需要列出来,谁不知道线代是数学）.恭喜你,你的职业未来将是最光明的.如果到美国打工的话你可以找到最好的职业（参考本节后附的一份小资料）. (2)想搞电子工程,好,电路分析、线性信号系统分析、数字滤波器分析设计等需要线代,因为线代就是研究线性网络的主要工具；进行IC集成电路设计时,对付数百万个集体管的仿真软件就需要依赖线性方程组的方法；想搞光电及射频工程,好,电磁场、光波导分析都是向量场的分析,比如光调制器分析研制需要张量矩阵,手机信号处理等等也离不开矩阵运算. (3)想搞软件工程,好,3D游戏的数学基础就是以图形的矩阵运算为基础；当然,如果你只想玩3D游戏可以不必掌握线代；想搞图像处理,大量的图像数据处理更离不开矩阵这个强大的工具,《阿凡达》中大量的后期电脑制作没有线代的数学工具简直难以想象. (4)想搞经济研究.好,知道列昂惕夫（Wassily Leontief）吗?哈佛大学教授,1949年用计算机计算出了由美国统计局的25万条经济数据所组成的42个未知数的42个方程的方程组,他打开了研究经济数学模型的新时代的大门.这些模型通常都是线性的,也就是说,它们是用线性方程组来描述的,被称为列昂惕夫“投入-产出”模型.列昂惕夫因此获得了1973年的诺贝尔经济学奖. (5)相当领导,好,要会运筹学,运筹学的一个重要议题是线性规划.许多重要的管理决策是在线性规划模型的基础上做出的.线性规划的知识就是线代的知识啊.比如,航空运输业就使用线性规划来调度航班,监视飞行及机场的维护运作等；又如,你作为一个大商

教学流程	场的老板,线性规划可以帮助你合理的安排各种商品的进货,以达到最大利润. (6)对于其他工程领域,没有用不上线代的地方.如搞建筑工程,那么奥运场馆鸟巢的受力分析需要线代的工具；石油勘探,勘探设备获得的大量数据所满足的几千个方程组需要你的线代知识来解决；飞行器设计,就要研究飞机表面的气流的过程包含反复求解大型的线性方程组,在这个求解的过程中,有两个矩阵运算的技巧：对稀疏矩阵进行分块处理和进行LU分解； 作餐饮业,对于构造一份有营养的减肥食谱也需要解线性方程组；知道有限元方法吗?这个工程分析中十分有效的有限元方法,其基础就是求解线性方程组.知道马尔科夫链吗?这个“链子”神通广大,在许多学科如生物学、商业、化学、工程学及物理学等领域中被用来做数学模型,实际上马尔科夫链是由一个随机变量矩阵所决定的一个概率向量序列,看看,矩阵、向量又出现了. (7)另外,矩阵的特征值和特征向量可以用在研究物理、化学领域的微分方程、连续的或离散的动力系统中,甚至数学生态学家用以在预测原始森林遭到何种程度的砍伐会造成猫头鹰的种群灭亡；大名鼎鼎的最小二乘算法广泛应用在各个工程领域里被用来把实验中得到的大量测量数据来拟合到一个理想的直线或曲线上,最小二乘拟合算法实质就是超定线性方程组的求解；二次型常常出现在线性代数在工程（标准设计及优化）和信号处理（输出的噪声功率）的应用中,他们也常常出现在物理学（例如势能和动能）、微分几何（例如曲面的法曲率）、经济学（例如效用函数）和统计学（例如置信椭圆体）中,某些这类应用实例的数学背景很容易转化为对对称矩阵的研究.） 在中学里，我们已经学过四则运算，也学过解方程和方程组，但仅仅局限于解简单的方程组，比如一元二次方程，二元一次方程等，但对于多元一次方程如何寻求一个简单有共性高效的方法，尤其在现在大量采用计算机，程序化运算显得尤其重要。例如四元一次方程组： $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1 \\ 3x_1+2x_2-8x_3+7x_4=-1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=-2 \end{cases}$ 引出今天要学的内容：行列式。 （思政内容：行列式出现于线性方程组的求解，它是数学语言的改革，是一种速记表达方式。 它的简化的记法常常是深奥理论的源泉。 ——P.S.Laplace 行列式的概念最早是由十七日本数学家关孝和提出来的（1683年）。

教学流程

新知讲解：

一、二阶与二阶行列式

一个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，用消元法求解，得其解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}b_{21}}，\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}b_{21}} \tag{1.2}$$

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \tag{1.3}$$

则

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}$$

将 D 称为二阶行列式.

对于由 9 个元素 $a_{ij}(i, j = 1,2,3)$ 排成的式子，定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}$$

称为三阶行列式.

（互动环节：学生们讨论三阶行列式展开式的记忆方法，老师可以从对角线方向加以引导，也可以从项数、符号及每项的构成方向上加以引导）

其规律遵循图 1.1 所示的对角线法则：

教学流程

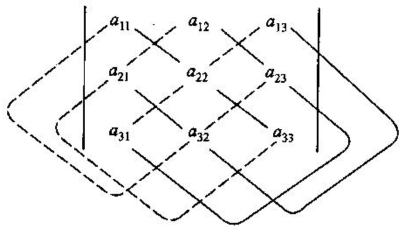


图 1.1

如果三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

用消元法求解这个方程组，可得

$$x_1 = \frac{D_1}{D}，x_2 = \frac{D_2}{D}，x_3 = \frac{D_3}{D} \qquad (1.5)$$

则

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}，D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}，D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

例 1 计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix}$

解：按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D &= 3\times(-3)\times 2 + 2\times 4\times 4 + 2\times(-5)\times 3 - 3\times(-3)\times 4 - 2\times 2\times 2 - 3\times 4\times(-5) \\ &= -18 - 30 + 32 + 36 + 60 - 8 = 72 \end{aligned}$$

知识点巩固：

例 2 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 6 & 4 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

解 ：方程左端的三阶行列式

教学流程	$$D=2x^2+6x+4-12-x^2-4x$$ $$=x^2+2x-8$$ 于是得 $x^2+2x-8=0$ 解之，得 $x=2,x=-4$. **二、排列与逆序** **定义 1** 由正整数$1,2,\cdots n$组成的一个没有重复数字的n元有序数组，称为一个n级排列，简称排列，记为$(i_1i_2\cdots i_n)$. **定义 2** 在一个n级排列$(i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)$中，如果数$i_s>i_t$，则称数$i_s$与$i_t$构成一个逆序.一个$n$级排列中逆序的总数称为该排列的逆序数，记为$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 设在一个$n$级排列$(i_1i_2\cdots i_n)$中所有比$i_t(t=i,2,\cdots n)$大的且排在$i_t$前面的数共有$t_i$个，则$i_t$的逆序数的个数为$t_i$，而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数.即 $$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$ **知识点巩固：** **例 3** 计算排列 32514 的逆序数 **解** ： 因为 3 排在首位，故其逆序的个数为 0； 在 2 的前面比 2 大的数有 1 个，故其逆序的个数为 1； 在 5 的前面比 5 大的数有 0 个，故其逆序的个数为 0； 在 1 的前面比 1 大的数有 3 个，故其逆序的个数为 3； 在 4 的前面比 4 大的数有 1 个，故其逆序的个数为 1. 易见所求排列的逆序数为 $$\tau(32514)=0+1+0+3+1=5$$ **定义 3** 逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列. **定义 4** 把一个排列$(i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)$中某两个数$i_s$、$i_t$的位置互换，而其余数不动，得到另一个排列$(i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)$，这样的变换称为一个对换，记为$(i_s,i_t)$. 将两个相邻元素对换，称为相邻对换. **定理 1** 任意一个排列经过一个对换后，改变奇偶性.也就是说，经过一次对换，奇排列变为偶排列，偶排列变为奇排列. **证明：**第一种情形，先看相邻对换的情况

教学流程

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$，显然，$a_1\cdots a_l, b_1\cdots b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，a、b 两元素的逆序数改变为：

当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；

当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1.

所以，排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性改变.

第二种情形，再看一般情况.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，

对它做 m 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$；再做 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$.总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性改变.

定理 2　n 个自然数 $(n>1)$ 共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇偶排列各占一半.

证明：　n 级排列的总数为 $n!$ 个.

设其中奇排列为 p 个，偶排列为 q 个，若对每个奇排列都做同一对换，则由定理 1，p 个奇排列均变成偶排列，故 $p\le q$.同理，对每个偶排列都做同一对换，则 q 个偶排列均变为奇排列，故 $q\le p$，从而

$$p=q=\frac{n!}{2}.$$

三、n 阶行列式的定义

通过观察三阶行列式的展开式可得如下结论：

（1）　三阶行列式共有 $3!$ 项；

（2）　每项都是取自不同行、不同列的三个元素的乘积；

（3）　每项的符号取决于，当该项元素的行标按自然数顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，奇排列则取负号.

所以，三阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 为对所有 3 级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

定义 5　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2\cdots n)$ 排成 n 行、n 列构成的记号：

教学流程	$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1.6)$$ 称为n阶行列式，其中$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$表示对所有$n$阶排列$j_1 j_2 \cdots j_n$求和，行列式有时也简记为$\det(a_{ij})$或$\lvert a_{ij} \rvert$，这里$a_{ij}$称为行列式的元素. n阶行列式的定义具有以下规律： **（互动环节：学生们讨论*n*阶行列式展开式的特点，老师可以从项数、符号及每项的构成方向上加以引导）** （1）行列式由$n!$项求和而成； （2）每项是取自不同行、不同列的n个元素乘积，每项各元素行标按自然数顺序排列后就是行列式的一般项形式： $$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$ （3）若行列式每项的行标都按自然数的顺序排列，其中$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$是指项的符号，且列序构成$n$级排列$(j_1 j_2 \cdots j_n)$，若此排列为奇排列则此项取负号，若此排列为偶排列则此项取正号，所以行列式项的符号一半为正，一半为负. **（思政内容：强调行列式的书写格式，利用行列式的规范性引入德育元素：诚信，严谨，科学。让学生体会科学的方法论中严谨，实事求是的重要性，从而达到培养科学思维方式的目的。）** **定理 3**　n阶行列式也可定义为 $$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}, \quad (1.7)$$ 其中，t为行标排列$p_1 p_2 \cdots p_n$的逆序数. **证明**：按行列式定义有 $$D = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$ 记 $$D_1 = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$ 由上面讨论知：对于D中任一项$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$，总有且仅有$D_1$中某一项$(-1)^s a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$与之对应并相等；反之，对于$D_1$中的任一项

教学流程	$(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$，也总有且仅有 D 中某一项 $(-1)^s a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ 与之对应并相等，于是 D 与 D_1 中的项可以一一对应并相等，从而 $D=D_1$. **例 4** 计算 n 阶行列式 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 的值，其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$. **解**：记行列式的一般项为 $$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$ D 中有很多项为零，现在考察有哪些项不为零.一般项中第一个元素 a_{1j_1} 取自第一行，但第一行中只有 a_{11} 不为零，因而 $j_1=1$，即 D 中只有含有 a_{11} 的那些项可能不为零，其他项均为零；一般项中第二个元素 a_{2j_1} 取自第二行，第二行中有 a_{21}和a_{22} 不为零，因第一个元素 a_{11} 已取自第一列，因此第二个元素不能再取自第一列，即不能取 a_{21}，所以第二个元素只能取 a_{22}，从而 $j_2=2$，即 D 中只有含 $a_{11}a_{22}$ 的那些项可能不为零，其他项均为零，这样推下去，可得 $j_3=3,j_4=4,\cdots j_n=n$.因此，D 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项不为零，其他项均为零.由于 $\tau(12\cdots n)=0$，因此这一项应取正号，于是可得 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} \qquad (1.8)$$ 称上面形式的行列式为下三角形行列式. 类似地可以证明：

教学流程

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

(1.9)

因为在给定行列式中，非零项只有一项，即

$$(-1)^{\tau(n\ n-1 \cdots 2\,1)} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

同理，有

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a$$

(1.10)

这些结论在以后行列式的计算中可直接应用.

由行列式定义不难得出：一个行列式若有一行（或一列）中的元素皆为零，则此行列式必为零.

知识点巩固：

例 5 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解： 一般项为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$，现考察不为零的项. a_{1j_1} 取自第一行，但只有 $a_{14} \neq 0$，故只可能 $j_1 = 4$，同理可得 $j_2 = 3$， $j_3 = 2$， $j_4 = 1$.即行列式中不为零的项只有 $(-1)^{\tau(4321_4)} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$，所以 $D = 24$.(或直接利用（1.10）的结果)

例 6 已知 $a_{23} a_{31} a_{42} a_{ij} a_{56} a_{14}$ 是六阶行列式中的一项，求 i, j ，并确定该项的符号.

（互动环节：提问学生，教师加以引导）

解： 由行列式的定义可知，行列式的每一项的元素均取自不同行、不同列.所以有 $i = 6, j = 5$ ，再将该项的行标按自然数的顺序排好，得

$$a_{14} a_{23} a_{31} a_{42} a_{56} a_{65}$$

列标的逆序数为 $\tau(431265) = 1 + 2 + 2 + 1 = 6$ 为偶排列故此项符号为正号.

教学流程

例 7　利用行列式的定义计算 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

（互动环节：留思考时间，随后提问学生，教师加以引导给出答案）

解：

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 1)} a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{nn} \\ &= (-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 1)} 1\times 2\cdots(n-1)n = (-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 1)} n! \end{aligned}$$

所以

$$D_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!$$

课堂评测：

习题 1 中：1.（1）3.（1）4.（1）7.（1）

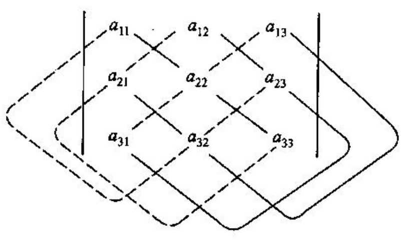
内容小结：

（1）二阶与二阶行列式

对角线法则：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32}$$



（2）排列与逆序

定理 1　任意一个排列经过一个对换后，改变奇偶性.也就是说，经过一次对换，奇排列变为偶排列，偶排列变为奇排列.

定理 2　n 个自然数 $(n>1)$ 共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇偶排列各占一半.

（3）n 阶行列式的定义

教学流程	$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} a_{3 j_3}$$ $$= \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$
教　学 后　记	

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">行列式　　　　内　容　　行列式的性质</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">§1.2 行列式的性质</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>1.2.1 n 阶行列式的性质
1.2.2 行列式的计算</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　　日　第　　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标:理解行列式的性质,会利用行列式的性质计算 n 阶行列式。
能力目标:通过行列式的性质的学习培养学生的数学逻辑思维能力；通过行列式的计算培养学生灵活应用数学知识解决问题的能力及计算能力。
思政目标:通过不同类型行列式的计算,体现了基本形式的相互关系与转化过程，培养学生看待问题和解决问题时要抓住问题的实质的意识与能力。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：行列式的性质。
难点：利用行列式的性质计算行列式。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">教师课前充分备课，了解学情；学生需要具备初等数学知识和计算技能。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、启发式教学、案例教学等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线上线下混合式教学</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">作业：习题一 8.（2）（3）（4）　9.（2）（3）10. 11. 12. 13. 14. 15.
思考：习题一（B）4.　7.　9.（2）（3）</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006
2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009
3.同济大学数学系. 工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社. 2014</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>教学流程</td><td>

导入：

上节课我们认识了行列式并且会用行列式的定义计算一些比较特殊的行列式，**（互动环节：下面我将请一位同学来说一下行列式展开式的特点。）**但是对于一般的行列式或者是用定义法展开后项数比较多的行列式，定义法就显得有些麻烦甚至解不出来，那么今天这一节我们由行列式的定义推导出一些性质，用以简化行列式的计算。

引出今天要学的内容：行列式的性质。

新知讲解：

一、*n* 阶行列式的性质

记：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证明：　记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式 $D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

即 D^T 的 (i,j) 元素为 b_{ij}，则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots n)$，按定义

$$D^T=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

由定理 3，有 $D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$，故 $D^T=D$.

性质 2　互换行列式的两行（列），行列式变号.

证明：设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 对换 i,j 两行得到的，即当 $k\neq i,j$ 时，

$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i,j$ 时，$b_{ip}=a_{jp},b_{jp}=a_{ip}$，

</td></tr>
</table>

教学流程	（互动环节：请同学们思考互换两行的位置后对行列式的展开式有什么影响？） 于是 $$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^t b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n} \\ &= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} \end{aligned}$$ 其中，$1 \cdots i \cdots j \cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序设排列 $p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则 $(-1)^t = -(-1)^{t_1}$，故证 $D_1 = -\sum (-1)^{t_1} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} = -D$ 毕 以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列，交换 i, j 两行记为 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i, j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$. **性质 3　行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.** **证明　：** $$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots k a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= kD \end{aligned}$$ 把第 i 行（或列）乘以 k，记作 $r_i \times k (或 c_i \times k)$. **性质 4　若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和，例如第 i 列的元素都是两数之和：** $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + b_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + b_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + b_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 则 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ **证明：** $$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (a_{ij_i} + b_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= D_1 + D_2 \end{aligned}$$

教学流程

性质 5　把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列（行）对应的元素上去，行列式不变.

知识点巩固：

二、行列式的计算

例 1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

解：

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_1\leftrightarrow r_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_4-2r_1}{\overset{r_3-r_1}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \underset{r_4+3r_2}{\overset{r_3+r_2}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1\times(-1)\times(-2)\times(-2)=4$$

例 2　设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$，求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -3a_{12} & -9a_{13} \\ -2a_{21} & a_{22} & 3a_{23} \\ -2a_{31} & a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix}$.

解：

$$\begin{vmatrix} 6a_{11} & -3a_{12} & -9a_{13} \\ -2a_{21} & a_{22} & 3a_{23} \\ -2a_{31} & a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -2a_{11} & a_{12} & 3a_{13} \\ -2a_{21} & a_{22} & 3a_{23} \\ -2a_{31} & a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=-3\times(-2)\times3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=18\times2=36$$

教学流程	**例 3**　计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$. **解**：该行列式每行元素之和相等，此时把各列都加到第 1 列，提出第 1 列的公因子 $x+(n-1)a$，然后将第 1 行乘以-1 分别加到其余各行，D 就化为上三角行列式，即 $$D \overset{c_1+c_2+\cdots+c_n}{=} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$ $$\underset{\substack{r_3-r_1 \\ \cdots\cdots \\ r_n-r_1}}{\overset{r_2-r_1}{=}} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & a & \cdots & a \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$ $$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$ **例 4** 计算 $D=\begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **解**：根据行列式的特点，可将第 1 列加至第 2 列，然后将第 2 列加至第 3 列，再将第 3 列加至第 4 列，这样行列式化为一个下三角行列式. $$D \overset{c_2+c_1}{=} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_3+c_2}{=} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_4+c_3}{=} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4a_1a_2a_3$$ **（互动环节：请同学们自己思考练习计算，老师随后给出答案，下讲台巡视计算情况。）** **例 5**　证明奇数阶反对称行列式的值为零，其中，反对称行列式为下列形式的行列式： $$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$ 其特点是元素 $a_{ij}=-a_{ji}(i\neq j)$，$a_{ij}=0(i=j)$.

教学流程	**证明：** 设 $D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ 利用行列式性质 1 及性质 3 的推论 1，有 $$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} =\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} =(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} =(-1)^n D$$ 当 n 为奇数时有 $D=-D$，即 $D=0$. **（思政内容：通过练习，强调行列式性质的灵活应用，如何利用行列式的性质化行列式为三角形，体会几种行列式基本形式的相互关系与转化过程，体会数学化归思想。这种以“变”为突破，以“不变”为根基的解决问题的方法是“形变质不变”的完美体现，培养学生看待问题和解决问题时要抓住问题的实质，不要被表象迷惑。）** **课堂评测：** 习题 1 中：8.（1）（2） 9.（1） 12. **内容小结：** **（1）行列式的性质：** **性质 1** 行列式与它的转置行列式相等. **性质 2** 互换行列式的两行（列），行列式变号. **性质 3** 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式. **性质 4** 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和，例如第 i 列的元

教学流程	素都是两数之和 　　**性质 5**　把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列（行）对应的元素上去，行列式不变. 　　**（2）行列式的计算：** 　　利用行列式的性质把行列式化成上三角形。 　　特殊行注意特殊解法。
教　学 后　记	

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">行列式　　　　内　容　　行列式按行（列）展开</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">§1.3 行列式按行（列）展开</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>1.3.1 余子式、代数余子式
1.3.2 行列式按行（列）展开定理</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　　日　第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标:理解行列式的性质，会利用行列式的性质计算 n 阶行列式。
能力目标:通过行列式的性质的学习培养学生的数学逻辑思维能力；通过行列式的计算培养学生灵活应用数学知识解决问题的能力及计算能力。
思政目标:通过对数学家范德蒙德在数学领域中成就的简介，培养学生不断钻研的治学态度和勇于攀登的进步精神。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：行列式的性质。
难点：利用行列式的性质计算行列式。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">教师课前充分备课，了解学情；学生需要具备初等数学知识和计算技能。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、启发式教学、案例教学等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线上线下混合式教学</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">作业：习题一 8.（2）（3）（4）　9.（2）（3）　10. 11. 12. 13. 14. 15.
思考：习题一（B）4.　7.　9.（2）（3）</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006
2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009
3.同济大学数学系. 工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社. 2014</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>

导入：

上节课我们认识了行列式并且会用行列式的定义计算一些比较特殊的行列式，**（互动环节：下面我将请一位同学来说一下行列式展开式的特点。）**但是对于一般的行列式或者是用定义法展开后项数比较多的行列式，定义法就显得有些麻烦甚至解不出来，那么今天这一节我们由行列式的定义推导出一些性质，用以简化行列式的计算。

引出今天要学的内容：行列式的性质。

新知讲解：

一、余子式、代数余子式

定义 1 在 n 阶行列式 D 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列后，余下的 $n-1$ 阶行列式，称为 D 中元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij} .再记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ ，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

二、行列式按行（列）展开定理

定理 1 **n 阶行列式 $D=\left|a_{ij}\right|$ 等于它的任意一行（列）的各元素与其对应代数余子式乘积的和，即**

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (1.13)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

定理 2 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad (i\neq j) \qquad (1.14)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \qquad (i\neq j)$$

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&0&0&4\\3&1&0&0\\5&0&1&0\\0&2&3&2\end{vmatrix}$$

解： 按第 1 行展开得

</td>
</tr>
</table>

教学流程	$$D=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&3&2\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}3&1&0\\5&0&1\\0&2&3\end{vmatrix}=2\times2-4\times(-6-15)=88$$ **（互动环节：在这道例题中发现，使用定理 1 时，应选择零元素较多的行（或列）展开，可以简化运算）** **例 2**　已知$\begin{vmatrix}\lambda+1&2&2\\-2&\lambda+4&-5\\2&-2&\lambda+1\end{vmatrix}=0$，求$\lambda$. **解：** $$\begin{vmatrix}\lambda+1&2&2\\-2&\lambda+4&-5\\2&-2&\lambda+1\end{vmatrix}\overset{r_1+r_3}{=}\begin{vmatrix}\lambda+3&0&\lambda+3\\-2&\lambda+4&-5\\2&-2&\lambda+1\end{vmatrix}\overset{c_3-c_1}{=}\begin{vmatrix}\lambda+3&0&0\\-2&\lambda+4&-3\\2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$ $$=(\lambda+3)\begin{vmatrix}\lambda+4&-3\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$ $$=(\lambda+3)[(\lambda+4)(\lambda-1)-6]$$ $$=(\lambda+3)(\lambda+5)(\lambda-2)$$ $$=0$$ 所以，$\lambda=-3,-5,2$ 是这个λ的三次方程的 3 个根. **例 3**　证明范德蒙德（Vandermonde）行列式 $$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\ge i>j\ge1}(x_i-x_j)，\qquad（1.15）$$ 其中记号“$\prod$”表示全体同类因子的乘积. **（思政内容：Vandermonde（范德蒙：法国数学家）首次对行列式理论进行系统的阐述成为行列式的奠基人。范德蒙在高等代数方面有重要贡献。他在 1771 年发表的论文中证明了多项式方程根的任何对称式都能用方程的系数表示出来。他不仅把行列式应用于解线性方程组，而且对行列式理论本身进行了开创性研究。他给出了用二阶子式和它的余子式来展开行列式的法则，还提出了专门的行列式符号。他还有拉格朗日的预解式、置换理论等思想，为群的观念的产生做了一些准备工作。）** **证：**　用数学归纳法.因为 $$D_2=\begin{vmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\ge i>j\ge1}(x_i-x_j)$$ 所以当$n=2$时（1.15）式成立.现在假设（1.15）式对于$n-1$阶范德蒙德行列式成立，要证（1.15）式对n阶范德蒙德行列式也成立.

教学流程	为此，设法把 D_n 降阶：从第 n 行开始，后行减去前行的 x_1 倍，有 $$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$ 按第 1 列展开，并把每列的公因子 (x_i-x_1) 提出，就有 $$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$ 上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙德行列式，按归纳法假设，它等于所有 (x_i-x_j) 因子的乘积，其中 $n\ge i>j\ge 2$.故 $$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{n\ge i>j\ge 2}(x_i-x_j)=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j)$$ **例 4** 计算行列式 $$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 9 & 16\\ 1 & 8 & 27 & 64\end{vmatrix}$$ **解**：利用范德蒙德行列式的结论，有 $$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 9 & 16\\ 1 & 8 & 27 & 64\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2\\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3\end{vmatrix}=(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)=12$$ **例 5** 设 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 0 & -3 & 7\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ -3 & 4 & 0 & 3\\ 1 & -2 & 2 & -1\end{vmatrix}$ 求 （1） D 的代数余子式 A_{12} （2） $A_{11}-2A_{12}+2A_{13}-A_{14}$ （3） $A_{11}+A_{21}+2A_{31}+2A_{41}$ **解**：（1） A_{12} 可按定义求出， $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & 0 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=6$ （2） $A_{11}-2A_{12}+2A_{13}-A_{14}=0$（是第四行元素乘以第一行元素的代数余子式） （3）对于问题（3） D 中没有 1、1、2、2 这列可以构造一个新行列式

教学流程

设为：$D_1=\begin{vmatrix}1&0&-3&7\\1&1&2&1\\2&4&0&3\\2&-2&2&-1\end{vmatrix}$ 这个行列式虽然与 D 值不同，但 D_1 的代数余子式 $A_{11},A_{21},A_{31},A_{41}$ 与 D 的相同，对 D_1 按第一列展开就有

$$A_{11}+A_{21}+2A_{31}+2A_{41}=D_1=\begin{vmatrix}1&0&-3&7\\1&1&2&1\\-2&0&-8&-1\\4&0&6&\text{`}\end{vmatrix}=144\,.$$

例 6 计算 $\begin{vmatrix}2&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&2\end{vmatrix}$

解：将原行列式记为 D_5 ,按第一行展开 $D_5=2D_4-\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{vmatrix}=2D_4-D_3$

整理得

$$D_5-D_4=D_4-D_3=D_3-D_2=D_2-D_1=3-2=1$$
$$D_5=D_4+1=D_3+2=D_2+3=D_1+4=6\,.$$

很多行列式的计算都可以利用递推公式法求得.

***三、行列式按 k 行（列）展开定理（拉普拉斯定理）**

定理 3（拉普拉斯定理）在 n 阶行列式中，任意取定 k 行（列） $(1\le k\le n-1)$，由这 k 行（列）组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式 D .

例 7 用拉普拉斯定理求行列式 $\begin{vmatrix}2&3&0&0\\1&2&3&0\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{vmatrix}$ 的值.

解：按第一行和第二行展开

$$\begin{vmatrix}2&3&0&0\\1&2&3&0\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}\times(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0\\1&3\end{vmatrix}\times(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&0\\2&3\end{vmatrix}\times(-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix}0&3\\0&2\end{vmatrix}$$
$$=1-12+0=-11$$

课堂评测：

习题 1 中：8.（1）（2） 9.（1） 12.

内容小结：

（1）行列式的性质：

<table>
<tr><td>教学流程</td><td>
性质 1　行列式与它的转置行列式相等.
性质 2　互换行列式的两行（列），行列式变号.
性质 3　行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.
性质 4　若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和，例如第 i 列的元素都是两数之和
性质 5　把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列（行）对应的元素上去，行列式不变.
（2）行列式的计算：
利用行列式的性质把行列式化成上三角形。
特殊行注意特殊解法。
</td></tr>
<tr><td>教　学
后　记</td><td></td></tr>
</table>

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">行列式　　　　内　容　　　克拉默法则</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">§1.4 克拉默法则
第一章 行列式习题课</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>1.4.1 克拉默法则解线性方程组及在齐次线性方程组上的应用
第一章 习题课</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　　日　第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标:理解和掌握克拉默(Cramer)法则及使用条件 ，掌握齐次线性方程组非零解的判定。
能力目标:通过行列式展开定理的学习,进一步提升学生的行列式计算能力。
思政目标:通过对数学家克拉默的简介,培养学生严谨和不断钻研的治学态度，及为科学的献身精神。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：克拉默法则应用。
难点：克拉默法则应用。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">教师课前充分备课，了解学情；学生需要具备初等数学知识和计算技能。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、启发式教学、案例教学等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线上线下混合式教学</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">作业：习题一 8.（3）（4）　9.（2）（3） 10. 11. 12. 13. 14. 15.
思考：习题一（B）4.　7.　9.（2）（3）</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006
2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009
3.同济大学数学系. 工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社. 2014</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>
导入：
同学们我们现在回忆一下本章开始，为了求解两个二元一次方程构成的方程组，引入了二阶行列式的概念，然后指出若这个方程组的“系数行列式”不等于 0，则方程组具有唯一解，且这个唯一解可以借助行列式符号简单的表示。
本节我们来推广上述内容，即对一般情形下由 n 个 n 元线性方程构成的方程组回答以下两个问题：
（1）满足什么条件时这个方程组有唯一解？
（2）有唯一解时这个解如何求出？
关于这两个问题我们可以用一个著名的法则——克莱姆法则，在讲克莱姆法则之前，让我们先来认识一下数学家克拉姆：

（思政内容：（Cramer,Gabriel，瑞士数学家 1704-1752） 克莱姆克莱姆 1704 年 7 月 31 日生于日内瓦,早年在日内瓦读书,1724 年起在日内瓦加尔文学院任教，1734 年成为几何学教授，1750 年任哲学教授。他自 1727 年进行为期两年的旅行访学。在巴塞尔与约翰．伯努 利、欧拉等人学习交流，结为挚友。后又到英国、荷兰、法国等地拜见许多数学名家，回国后在与他们的长期通信 中，加强了数学家之间的联系，为数学宝库也留下大量有价值的文献。他一生未婚，专心治学，平易近人且德高望 重，先后当选为伦敦皇家学会、柏林研究院和法国、意大利等学会的成员。主要著作是《代数曲线的分析引论》（1750），首先定义了正则、非正则、超越曲线和无理曲线等概念，第一 次正式引入坐标系的纵轴（Y 轴），然后讨论曲线变换，并依据曲线方程的阶数将曲线进行分类。为了确定经过 5 个点的一般二次曲线的系数，应用了著名的“克莱姆法则”，即由线性方程组的系数确定方程组解的表达式。该法则于 1729 年由英国数学家马克劳林得到，1748 年发表，但克莱姆的优越符号使之流传。）

新知讲解：

定理 1　（克莱姆法则）如果线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad ①$$
的系数行列式不等于零，即
</td>
</tr>
</table>

教学流程	(see below)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么，方程组（1-7）有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}, \tag{1.16}$$

其中 D_j（ $j=1,2,\cdots,n$ ）是把系数行列式 D 中的第 j 列元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明：略.

例 1　求解下列三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=6 \\ 2x_1-x_2-x_3=5 \\ x_1+x_2-2x_3=-2 \end{cases}$$

解：系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2+4+1+2+1-4=6\neq 0$$

用克拉默法则求方程组的解.因

$$D_1=\begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=12,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=-12,\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=6,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=-2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=1$$

例 2　已知某圆过点 $A(2,1)$, $B(3,4)$, $P(-2,-1)$,试求其方程及圆心和半径.

解：此题用平面解析几何的方法容易求解.这里用待定系数法求圆的方程.设圆的一般方程为

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

点 A,B,P 在圆上，它们的坐标满足方程，得

教学流程	$$\begin{cases} 4+1+2a+b+c=0 \\ 9+16+3a+4b+c=0 \\ 4+1-2a-b+c=0 \end{cases}，即 \begin{cases} 2a+b+c=-5 \\ 3a+4b+c=-25 \\ 2a+b-c=5 \end{cases}$$ 系数行列式 $$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-8+3+2-8-2+3=-10\neq 0$$ $$D_1=\begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -25 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-40，D_2=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & -25 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}=80，D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & -25 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=50，$$ 所以 $$a=\frac{D_1}{D}=4，b=\frac{D_2}{D}=-8，c=\frac{D_3}{D}=-5.$$ 圆的一般方程和标准方程分别为 $$x^2+y^2+4x-8y-5=0，$$ $$(x+2)^2+(y-4)^2=25$$ 该圆的圆心$O(-2,4)$，圆的半径$r=5$. **定理 2** 如果齐次线性方程组②的系数行列式不等于零，则齐次线性方程组②没有非零解. **定理 3** 如果齐次线性方程组有②非零解，则齐次线性方程组②的系数行列式必为零. **例 3** 问λ为何值时，齐次线性方程组 $$\begin{cases} (5-\lambda)x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+(6-\lambda)x_2=0 \\ 2x_1+(4-\lambda)x_3=0 \end{cases}$$ 有非零解？ **解：** 方程组的系数行列式为 $$D=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda)$$ 若方程组有非零解，则它的系数行列式$D=0$,从而有$\lambda=2$，$\lambda=5$，$\lambda=8$.容易验证，当$\lambda=2$，$\lambda=5$或$\lambda=8$时，齐次线性方程组有非零解. **课堂评测：** 习题 1 中：8.（1）（2） 9.（1） 12. **内容小结：**

教学流程	**（1）克拉默法则：** （克莱姆法则）如果线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \quad ①$$ 的系数行列式不等于零，即 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$ 那么，方程组（1-7）有唯一解 $$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}, \qquad (1.16)$$ 素乘以同一数然后加到另一列（行）对应的元素上去，行列式不变. **（2）克拉默法则的使用条件：** a.方程的个数与未知数的个数一样 b.系数行列式不为零。 **第一章习题课：（A）** 3. 求下列排列的逆序数： (4)($n(n-1)\cdots 21$). 6. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上元素为零，证明该行列式为零. 7. 利用行列式的定义计算： (4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$. 8. 利用行列式性质计算下列行列式： (4) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

教学流程	13. 计算行列式$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$. 14. 计算行列式$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$，$a_i \neq 0$（$i=1$，2，…，$n$）. 17. 已知 4 阶行列式$D$中第 3 列元素依次为-1，2，0，1，它们的余子式依次分别为 5，3，-7，4,求D. 19. 设 $$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix},$$ D的(i,j)元的代数余子式记作A_{ij}，求$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$. 20. 求 4 阶行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$的第 4 行各元素的代数余子式之和，即求$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$之值(其中$A_{4j}$（$j=1$，2，3，4)为$D$的第 4 行第$j$列元素的代数余子式). 29. λ取何值时，齐次线性方程组 $$\begin{cases} (1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0 \\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0 \end{cases}$$ 有非零解？

教学流程	**第一章习题课：（B）** 8. 设$\lvert A\rvert$、$\lvert B\rvert$均为n（$n>2$）阶行列式，则（　　　）. (A) $\lvert A+B\rvert=\lvert A\rvert+\lvert B\rvert$；　(B) $\lvert A-B\rvert=\lvert A\rvert-\lvert B\rvert$； (C) $\lvert AB\rvert=\lvert A\rvert\lvert B\rvert$；　(D) $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=\lvert A\rvert\lvert B\rvert$. 9. 计算下列行列式： (2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & \cdots & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & n \end{vmatrix}$（$n\geqslant 3$）； (3) $\begin{vmatrix} x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1+2 & x_2+2 & \cdots & x_n+2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1+n & x_2+n & \cdots & x_n+n \end{vmatrix}$（$n>2$）.
教　学 后　记	

章节（单元）教案

要　素	矩阵 **内　容**			
章节名称	第二章　　矩阵		**教学时数**	2
单元内容	2.1　矩阵的概念与计算	**时间**	年　月　日第　节	
教学目标	理解矩阵概念 熟练掌握矩阵的加、减、数乘、乘法运算			
思政目标	在讲解行列式与矩阵的区别时，虽然其外边形状很相似，但其本质完全不同，行列式本质是一个值，后者是一个方阵，完全不同，因此有意识的引出“现象与本质”的辩证关系，引导学生能透过现象看本质，要善于抓住事物的本质特点。在讲解矩阵的运算中引出规矩意识，“无规矩不成方圆”，使学生意识到遵规守距，方能造就人生。			
重点难点	教学重点：矩阵的加法、数乘、乘法运算、转置运算的运算规则以及其运算性质。 教学难点：矩阵的乘法运算以及其性质，特别是其与多项式乘法的区别。			
教学要求	1.通过讲解引入矩阵的概念，使学生掌握矩阵的基本规律、几类特殊矩阵（比如零矩阵、单位矩阵、对称矩阵和反对称矩阵）的定义和性质、注意矩阵运算与通常数运算的异同。 2.通过具体例子的讲解，使学生学会矩阵的运算。			
教学方法	课堂讲授、启发式教学、案例教学等			
授课方式	线上线下混合式教学			
练　习 作　业	习题二（A）　第 1、3 题			
参　考 资　料	1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006. 2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009. 3.同济大学数学系. 工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社. 2014.			

章节（单元）教案

教学流程

一、导入

矩阵是从实际问题的计算中抽象出来的一个数学概念，是数学研究中常用的工具，它不仅在数学中的地位十分重要，而且在工程技术各领域中也有着广泛的应用。矩阵的运算在矩阵的理论中起着重要的作用.它虽然不是数，但用来处理实际问题时往往要进行矩阵的代数运算。

二、讲解

2.1矩阵的概念与计算

（一）矩阵的概念

定义1 由$m\times n$个数a_{ij}（i=1，2，…，m；j=1，2，…，n）排成的m行n列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为m行n列矩阵，简称$m\times n$矩阵.为表示它是一个整体，总是加一个括弧，记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

简记为$\mathrm{A}=\mathrm{A}_{\mathrm{m\times n}}=(a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})$.

这 $m\times n$个数称为矩阵A的元素，简称为元.

元素是实数的矩阵称为实矩阵,元素是复数的矩阵称为复矩阵.

注：要注意矩阵与行列式的区别。

思政内容：在讲解行列式与矩阵的区别时，虽然其外边形状很相似，但其本质完全不同，行列式本质是一个值，后者是一个方阵，完全不同，因此有意识的引出“现象与本质”的辩证关系，引导学生能透过现象看本质，要善于抓住事物的本质特点。

特殊的矩阵

1.行数与列数都等于n的矩阵，称为n**阶方阵**.可记作A.

2.只有一行的矩阵$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为行矩阵(或行向量).

只有一列的矩阵 $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 称为列矩阵(或列向量)．

3.元素全是零的矩阵称为零距阵．可记作 0 ．例如：

$o_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad o_{1\times 4}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.形如 $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ 的方阵称为对角阵，记作：

A = diag （ $a_1,a_2,\cdots,a_n$）

特别的，方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 称为单位阵。记作 E_n

5.形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的方阵称为下三角矩阵。

6.形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的方阵称为上三角矩阵。

同型矩阵与矩阵相等的概念

两个矩阵的行数相等、列数相等时，称为**同型矩阵.**

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ 为同型矩阵.

定义 2 设 $A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{m\times n}$ 为同型矩阵，如果对于任意 i，

$j(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，都有 $a_{ij}=b_{ij}$，则称矩阵 A 与 B 相等. 记作 $A=B$.

例 1 设有 3 个炼油厂以原油作为主要原料，利用 1t 原油生产的燃油、柴油和汽油数量如下表(单位：t)：

	第一炼油厂	第二炼油厂	第三炼油厂
燃油	0.762	0.476	0.286
柴油	0.190	0.476	0.381
汽油	0.286	0.381	0.571

若以 a_{ij} 表示第 i 炼油厂提炼第 j 种成品油的数量，则各炼油厂利用 1t 原油提炼的成品油的数量可用矩阵表示成

$$A=\begin{pmatrix} 0.762 & 0.190 & 0.286 \\ 0.190 & 0.476 & 0.381 \\ 0.286 & 0.381 & 0.571 \end{pmatrix}$$

例 2 线性变换

$$\begin{cases} y_1=\lambda_1 x_1, \\ y_2=\lambda_2 x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n=\lambda_n x_n, \end{cases}$$

对应 n 阶方阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \qquad (2.4)$$

这个方阵的特点是：不在对角线上的元素都是 0. 这种方阵称为对角矩阵，简称对角阵. 对角阵也记作

$$\Lambda=\mathrm{diag}\left(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\right).$$

例 3 线性方程组

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3 \\ 3x_1+8x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7 \end{cases}$$

这个方程组未知量系数及常数项按方程组中的顺序组成一个 4 行 5 列的矩形阵如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

称为该线性方程组的增广矩阵.

例 4 设

$$A=\begin{pmatrix} 4 & x-1 & 3 \\ 0 & 2 & -3z \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & -x & 3 \\ 0 & y & 2-z \end{pmatrix}$$

已知 $A=B$，求 x，y，z.

解: 因为 $A=B$，所以 $x-1=-x$，$y=2$，$-3z=2-z$，求得 $x=\frac{1}{2}$，$y=2$，$z=-1$.

（二）矩阵的运算

1. 矩阵的加法

定义 3 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$，那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，则

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

注意：只有当两个矩阵为同型矩阵时，这两个矩阵才能进行加法运算.

矩阵加法满足下列运算规律(设 A, B, C 都是 $m\times n$ 矩阵)：

(1) 交换律 $A+B=B+A$；

(2) 结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$.

设矩阵 $A=(a_{ij})$，记

$$-A=(-a_{ij}),$$

$-A$ 称为矩阵 A 的负矩阵，显然有

$$A+(-A)=O,$$

因此，矩阵的减法为

$$A-B=A+(-B).$$

2. 数与矩阵相乘

定义 4 数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，则

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (2.6)$$

数乘矩阵满足下列运算规律(设 A，B C 为 $m\times n$ 矩阵，λ，μ 为数)：

(1) 结合律 $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$；

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$；

(3) 分配律 $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

矩阵相加与数乘矩阵，统称为矩阵的线性运算.

例 5 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}，\quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}，$$

求 $3A-2B$.

解 由于

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & -3 & 6 \\ -3 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}，\quad 2B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}，$$

故

$$3A-2B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & -5 & 4 \\ -9 & 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. 矩阵的乘法

定义 5 设 A 是一个 $m\times s$ 矩阵，B 是一个 $s\times n$ 矩阵，即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}，\quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}.$$

则 A 与 B 之乘积 AB (记作 $C=(c_{ij})$) 是一个 $m\times n$ 矩阵，且

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\ . \qquad (2.7)$$

即矩阵$C=AB$的第i行第j列元素c_{ij}，是A的第i行s个元素与B的第j列相应的s个元素分别相乘的乘积之和.

注意：两个矩阵A与B可以相乘的条件是A的列数等于B的行数，否则A与B不可乘.

AB是以A左乘B的乘积，BA是以A右乘B的乘积.

例 6　求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}4&-1&2\\1&1&0\\0&3&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\3&0\end{pmatrix}$$

的乘积AB.

解　因为A是3×3矩阵，B是3×2矩阵，A的列数等于B的行数，所以矩阵A与B可以相乘，其乘积是一个3×2的矩阵，按定义有

$$C=AB=\begin{pmatrix}4&-1&2\\1&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\3&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4\times1+(-1)\times0+2\times3 & 4\times2+(-1)\times1+2\times0\\1\times1+1\times0+0\times3 & 1\times2+1\times1+0\times0\\0\times1+3\times0+1\times3 & 0\times2+3\times1+1\times0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10&7\\1&3\\3&3\end{pmatrix}.$$

注：因为B是3×2矩阵，A是3×3矩阵，B的列数不等于A的行数，所以矩阵B与A不可以相乘.

例 7　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix},$$

求矩阵乘积AB及BA.

解　依据定义有

$$AB=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}.$$

注：由上例可以看出：

（1）本题中 $AB \neq BA.$

（2）若 $A\neq\mathbf{0},B\neq\mathbf{0}$，但却有 $AB\neq\mathbf{0}$.即

$AB=\mathbf{0}$ 不能推出 $A=\mathbf{0}$ 或 $B=\mathbf{0}$.

若 $A\neq\mathbf{0},A(X-Y)=\mathbf{0}$ 不能推出 $X=Y$.

即消去律不成立.问题：在什么条件下成立？

要注意与数、多项式、函数进行对此，以便学生更好地掌握。

思政内容：我们不能盲目地和别人进行攀比，每个人都有自己独特的方面，我们应该发扬自己的优点，改正自己的缺点。根据自己的特点找到自己的人生目标，“不忘初心”，朝着目标努力奋斗。还要培养学生的辩证主义思维。

矩阵乘法的运算规律

(1) $ABC=A\left(BC\right)$；

(2) $\lambda AB=\lambda(AB)=A(\lambda B)$ (其中 λ 是数)；

(3) $A\left(B+C\right)=AB+AC$ ；$\left(B+C\right)A=BA+CA$

(4) $EA=AE=A$

(5) 设 A 是 n 阶矩阵，则　就是 k 个 A 的连乘积，即

$A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k}$ 则 $A^kA^l=A^{k+l}$　$\left(A^k\right)^l=A^{kl}$（k，l 为正整数）

注意：矩阵不满足交换律，即：

$AB\neq BA$　$(AB)^k\neq A^kB^k$

例 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

则 $$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}.$$

故 $AB\neq BA$.

但也有例外，比如设

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},$$

则有 $AB=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$ $BA=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\Rightarrow AB=BA.$

称 A，B 是可交换的。

定义 6 设 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$，系数 a_0，a_1，…，a_m 均为数域 P 中的数，A 为 P 上一个 n 阶方阵，那么 $a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$ 仍为 P 上一个 n 阶方阵，记为 $f(A)$，即

$$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E, \tag{2.9}$$

称为 A 的矩阵多项式.

例 6 设 $f(x)=x^2-2x-3$，$A=\begin{pmatrix}-1&0\\4&3\end{pmatrix}$，求 $f(A)$.

解 $A^2=\begin{pmatrix}-1&0\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\8&9\end{pmatrix}.$

$$f(A)=A^2-2A-3E=\begin{pmatrix}1&0\\8&9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&0\\4&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

4. 转置矩阵

定义 7 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

不改变每行元素的相互顺序，把 A 的行依次作为同序数的列所排成的矩阵.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的转置矩阵，记作 A^T.

显然，A^T 的元素 a_{ij} 就是 A 的元素 a_{ji}.

矩阵的转置也是一种运算，且满足下述运算规律：

(1) $\left(A^T\right)^T = A$；

(2) $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$；

(3) $\left(\lambda A\right)^T = \lambda A^T$　（λ 为数）；

(4) $\left(AB\right)^T = B^T A^T$.

前三条显然成立，下面仅证明(4).

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times s}$，$B=\left(b_{ij}\right)_{s\times n}$，记 $AB=C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$，$B^T A^T = D = \left(d_{ij}\right)_{n\times m}$，$C^T = \left(AB\right)^T$ 与 $B^T A^T = D$ 均为 $n\times m$ 矩阵. 只需证明 C^T 的元素 c_{ij}（即 C 中的 c_{ji}）等于 D 的元素 d_{ij}. 由矩阵乘法的定义，有

$$c_{ji} = \left(a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{js}\right)\begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{si} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{s} a_{jk} b_{ki}\ ,$$

而

$$d_{ij} = \left(b_{1i}, b_{2i}, \cdots, b_{si}\right)\begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{js} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{s} a_{jk} b_{ki}\ ,$$

于是 $c_{ji} = d_{ij}$（$i=1$，2，…，n；$j=1,2,\cdots,m$），即 $D=C^T$，亦即

$$B^T A^T = \left(AB\right)^T.$$

例 7 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix},$$

求$\left(AB\right)^T$.

解法 1 因为

$$AB=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{pmatrix},$$

所以

$$\left(AB\right)^T=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

解法 2

$$(AB)^T=B^TA^T=\begin{pmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

定义 8 设A为 n 阶方阵，如果$A^T=A$，即$a_{ij}=a_{ji}$（i，j=1，2，⋯，n)，则称A为对称矩阵；如果$A^T=-A$，即$a_{ij}=-a_{ji}$（i，j=1，2，⋯，n)，则称A为反对称矩阵。

例如：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&1&-1\\-3&-1&1\end{pmatrix}$$ 是一个 3 阶对称矩阵；

$$B=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-1&0&-3\\2&3&0\end{pmatrix}$$是一个 3 阶反对称矩阵；

A为对称矩阵的充分必要条件是$A^T=A$；A为反对称矩阵的充分必要条件是$A^T=-A$。

例 8 设A是$m\times n$矩阵，则A^TA和AA^T都是对称矩阵.

证 A^TA是n阶方阵，且$\left(A^TA\right)^T=A^T\left(A^T\right)^T=A^TA$。故$A^TA$是$n$

阶对称矩阵. 同理可证：AA^T 是 m 阶对称矩阵.

定理 1

⑴ 同阶对称矩阵的和、数量乘积、方幂仍为对称矩阵；

⑵ 同阶反对称矩阵的和、数量乘积仍为反对称矩阵；

⑶ A 为反对称矩阵，则当 k 为奇数时，A^k 为反对称矩阵；k 为偶数时；A^k 为对称矩阵。

注意：两个对称矩阵的乘积未必是对称矩阵。

例如：

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

均为对称矩阵，但

$$AB=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$$

就不是对称矩阵。

5. 方阵的行列式

定义 9 由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式(各元素的位置不变)，称为方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$.

请注意，方阵与行列式是两个不同的概念，n 阶方阵是由 n^2 个数按一定方式排成的数表，而 n 阶行列式则是一个数。

方阵的行列式的运算性质

(1) $|A^T|=|A|$；

(2) $|kA|=k^n|A|$ (k 是数)；

(3) $|AB|=|A||B|$；

(4) $|AB|=|BA|$.

例 9 设 A 为三阶矩阵，且 $|A|=-2$，求 $\left||A|A^2A^T\right|$.

解：

$$\left||A|A^2A^T\right|=|A|^3\left|A^2A^T\right|=|A|^3|A|^2\left|A^T\right|=|A|^3\cdot|A|\cdot|A|\cdot|A|=|A|^6=(-2)^6=64$$

	三、课堂练习 **计算：** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **四、 课堂小结** 1.矩阵的概念 2.矩阵的运算 **五、作业** 习题二（A）　第 1、3 题
教　学 后　记	

章节（单元）教案

<table>
<tr><th>要　素</th><th colspan="4">内　容</th></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第二章　　矩阵</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>2.2　逆矩阵</td><td>时间</td><td colspan="2">年　　月　日第　　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：掌握逆矩阵的概念及其性质。
能力目标：掌握逆矩阵的判别，会求可逆矩阵的逆矩阵，会用逆矩阵解矩阵方程。
思政目标：在学习矩阵的可逆不可逆时，培养学生的辩证思维能力。同时培养学生的包容性，让学生明白世界是五彩斑斓的，不要把自己的想法强加给别人。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">教学重点：可逆矩阵的判别、求解及其性质。
教学难点：逆矩阵的求法。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">1.通过逆矩阵及其性质的教学，使学生理解逆矩阵的作用，使学生掌握求逆矩阵的方法，会用逆矩阵解矩阵方程。
2.通过逆矩阵的教学，使学生进一步受到辩证唯物主义观点的教育。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、课堂讨论、课堂练习等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">课堂讲解+课堂练习</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">习题二（A）　第 9、10、11、12、13、14、15、17、18 题。</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006.
2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009.
3.同济大学数学系. 工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社. 2014.</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

教学流程

一、导入

在解一元线性方程$ax=b$中，当$a\neq 0$时，存在一个数a^{-1}，使$x=a^{-1}b$为方程的解。那么在解矩阵方程$Ax=b$时，是否也存在一个矩阵，使 X 等于这个矩阵左乘 b.

二、讲解

2.2 逆矩阵

（一）逆矩阵的概念

定义 1 设A为n阶方阵，若存在n阶方阵B，使得

$$AB=BA=E.$$

则称方阵A是可逆的，并称B为A的逆矩阵，简称A的逆，记为A^{-1}.

设B、C均为A的逆，则有

$$AB=BA=E\text{，}\quad AC=CA=E$$

于是

$$B=BE=B\left(AC\right)=\left(BA\right)C=EC=C$$

可见，A的**逆矩阵是唯一的**.

思政内容：引出“对立与统一”的辩证关系，使学生意识到现实生活中“对立和统一”的事物比比皆是，由对立可由此知彼，因统一能互为利用，对立与统一共同构成了美好的世界。不能要求别人的想法和自己一样，要包容世界的多样性。

（二）方阵可逆的条件

定义 2 设n阶方阵$A=\left(a_{ij}\right)$，元素a_{ij}在$|A|$中的代数余子式为A_{ij}（i，$j=1,2,\cdots,n$），则矩阵

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.11)$$

称为A的伴随矩阵.

定理 1 方阵A可逆的充分必要条件是$|A|\neq 0$，且如果$|A|\neq 0$，则

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*} \qquad (2.12)$$

其中A^*为A的伴随矩阵.

证明　必要性, 因为A可逆，所以存在A^{-1}，使$AA^{-1}=E$，从而$|A|\cdot|A^{-1}|=|E|=1$，所以$|A|\neq 0$.

充分性, 由于

$$AA^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}=|A|E$$

同理

$$A^*A=|A|E$$

从而

$$AA^*=A^*A=|A|E \qquad (2.13)$$

又因为$|A|\neq 0$，所以

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=A^{\ *}=E$$

由定义 1 知A可逆，且$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$.

例 1　设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

验证A是否可逆，若可逆求其逆.

解　因为$|A|=1\neq 0$，所以A可逆。再计算

$$A_{11}=7,\quad A_{21}=-3,\quad A_{31}=-3$$

$$A_{12}=-1,\quad A_{22}=1,\quad A_{32}=0$$

$$A_{13}=-1,\quad A_{23}=0,\quad A_{33}=1$$

得

$$A^*=\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}7 & -3 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

定理 2　n阶方阵A可逆的充分必要条件是存在n阶方阵B，使$AB=E$（或$BA=E$），并且当A可逆时，$B=A^{-1}$.

证明　若A可逆，则取$B=A^{-1}$，即有$AB=E$. 反之，若$AB=E$，等式两端取行列式，即有

$$|A||B|=1.$$

可见$|A|\neq 0$，故A可逆. 在$AB=E$两端同时左乘A^{-1}，便得

$$B=A^{-1}.$$

推论 1　对于n阶方阵A，B，只要有$AB=E$，则A，B都可逆且互为逆矩阵.

例 2　若n阶矩阵A满足$A^2-2A-4E=O$，试证$A+E$可逆，并求$(A+E)^{-1}$.

证　因为

$$A^2-2A-4E=O,$$

即

$$A^2+A-3A-3E=E\text{整理得}A(A+E)-3(A+E)=E,$$

所以

$$(A-3)(A+E)=E.$$

由定义知$A+E$可逆，且$(A+E)^{-1}=A-3E$.

注：对于此类矩阵多项式，证明时要根据所给关系式‘凑’出所求矩阵因子，再由定义或性质证明.

（三）可逆阵的性质

性质 1　如果A可逆，则A^{-1}也可逆，且

$$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A.$$

证明　由于$AA^{-1}=E$，根据本节推论 1 可知

$$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A.$$

性质 2　如果A可逆，数$\lambda\neq 0$，则λA可逆，且

$$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

证明　由于$(\lambda A)\frac{1}{\lambda}A^{-1}=\left(\lambda\frac{1}{\lambda}\right)\left(AA^{-1}\right)=E$. 由本节推论 1 可知性质 2 成立.

性质 3　如果A、B均为可逆矩阵，则AB也可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

证明　由于$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$. 由本节推论 1 即有$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

性质 4　如果A可逆，则A^T也可逆，且$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$.

证明　因为$A^T\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^{-1}A\right)^T=E^T=E$，所以

$$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T.$$

当$|A|\neq 0$时，还可以定义

$$A^0=E，\quad A^{-k}=\left(A^{-1}\right)^k，$$

其中k为正整数。这样，当$|A|\neq 0$，λ、μ为整数时，有

$$A^{\lambda}A^{\mu}=A^{\lambda+\mu}，\quad \left(A^{\lambda}\right)^{\mu}=A^{\lambda\mu}.$$

例 3　设

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{pmatrix}，\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}，\quad C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}，$$

求矩阵X, 使它满足

$$AXB=C.$$

解　由于$|A|=1\neq 0$，$|B|=1\neq 0$，所以，B^{-1}存在，用A^{-1}左乘上式两端，B^{-1}右乘上式两端，有

$$A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}，$$

即

$$X=A^{-1}CB^{-1}.$$

因为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix},$$

于是

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-3\\-1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27&-10\\-8&3\\0&0\end{pmatrix}.$$

注： 对于标准矩阵

$$AX=B, XA=B, AXB=C$$

利用矩阵乘法的运算规律和逆矩阵的运算性质，通过在方程两边左乘或右乘相应矩阵的逆矩阵，可以求出其解分别为

$$X=A^{-1}B, X=BA^{-1}, X=A^{-1}CB^{-1}.$$

而其他形式的矩阵方程，则可以通过矩阵的有关性质转化为标准方程再进行求解.

例 4 设 A 可逆，且 $A^*B=A^{-1}+B$，证明 B 可逆，当

$$A=\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}$$

时，求 B.

解 由 $A^*B=A^{-1}+B=A^{-1}+EB$，得

$$\left(A^*-E\right)B=A^{-1}.$$

于是 $\left|A^*-E\right|\left|B\right|=\left|A^{-1}\right|\neq 0$，所以 A^*-E 可逆，

$$B=\left(A^*-E\right)^{-1}A^{-1}=\left[A\left(A^*-E\right)\right]^{-1}=\left[\left|A\right|E-A\right]^{-1},$$

其中

$$\left|A\right|E-A=\begin{pmatrix}8&&\\&8&\\&&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&6&0\\0&2&6\\0&0&2\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

按逆矩阵的运算律和求逆公式，易得

$$B=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

	性质 5 如果 A 可逆，$\left\|A^{-1}\right\|=\|A\|^{-1}$，即 $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det A}$. **证明** 因为 $AA^{-1}=E$，所以 $\|A\|\left\|A^{-1}\right\|=1$，$\|A\|\neq 0$，因此 $$\left\|A^{-1}\right\|=\frac{1}{\|A\|}=\|A\|^{-1}.$$ 必须注意，A，B 都可逆，$A+B$ 不一定可逆. 即使 $A+B$ 可逆，$\left(A+B\right)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$. **例 5** 若三阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^{*}，已知 $\|A\|=\dfrac{1}{2}$，求 $\left\|(3A)^{-1}-2A^{*}\right\|$ 的值. **解** $A^{*}=\|A\|A^{-1}=\dfrac{1}{2}A^{-1}$， $\left\|(3A)^{-1}-2A^{*}\right\|=\left\|\dfrac{1}{3}A^{-1}-2\cdot\dfrac{1}{2}A^{-1}\right\|=\left\|-\dfrac{3}{2}A^{-1}\right\|=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{3}\|A\|^{-1}=-\dfrac{16}{27}$ **三、课堂练习** 求下列矩阵的逆矩阵： $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ **四、 课堂小结** 1.逆矩阵的定义、判定、求解； 2.逆矩阵的性质。 **五、作业** 习题二（A） 第 9、10、11、12、13、14、15、17、18 题
教 学 后 记	

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">内　容</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">第二章　　矩阵</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>2.3 矩阵分块法</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　日第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">理解分块矩阵概念，掌握分块矩阵的性质及计算方法，认识分块矩阵在矩阵理论中的地位和作用。</td></tr>
<tr><td>思政目标</td><td colspan="4">在分块矩阵的教学过程中向学生渗透“化整为零，化繁为简”的数学思想，即把复杂的问题分解而成若干个简单的问题，然后各个击破，从而使复杂问题简单化，从而得到解决，同时也提高学生对知识的应用能力，培养学生的逻辑推理能力，也培养了学生在今后的实际生活中处理复杂问题的能力。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">教学重点：理解分块矩阵概念
教学难点：掌握分块矩阵运算方法。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">1.理解分块矩阵的概念；
2.掌握分块矩阵的运算法则；
3.会用分块矩阵解决各种实际问题。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、课堂讨论、课堂练习等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">课堂讲解+课堂练习</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">习题二（A）第 25 题</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006
2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009
3.同济大学数学系．工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社．2014</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

教学流程

一、导入

分块矩阵是线性代数中的一个重要内容，是处理阶数较高的矩阵时常采用的技巧，也是数学在多领域的研究工具。对矩阵进行适当分块，可使高阶矩阵的运算可以转化为低阶矩阵的运算，同时也使原矩阵的结构显得简单而清晰，从而能够大大简化运算步骤，或给矩阵的理论推导带来方便。有不少数学问题利用分块矩阵来处理或证明，将显得简洁、明快。

二、讲解

2.3 矩阵分块法

（一）分块矩阵的概念

用若干条位于行与行之间的横线及若干条位于列与列之间的纵线,将矩阵 A 分成若干小矩阵，每个小矩阵都称为 A 的子块，以子块为元素形式的矩阵称为**分块矩阵**. 它的元素不再是数，而是矩阵. 将矩阵分割成分块矩阵的方法称为**矩阵的分块法**.

例如，将 3×4 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

分成子块的分法很多，下面举出 4 种分块形式：

$$(1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} & a_{24} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix};\quad (2)\begin{pmatrix} a_{11} & \vdots & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{14} \\ a_{21} & \vdots & a_{22} & a_{23} & \vdots & a_{24} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{31} & \vdots & a_{32} & a_{33} & \vdots & a_{34} \end{pmatrix};$$

$$(3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix};\quad (4)\begin{pmatrix} a_{11} & \vdots & a_{12} & \vdots & a_{13} & \vdots & a_{14} \\ a_{21} & \vdots & a_{22} & \vdots & a_{23} & \vdots & a_{24} \\ a_{31} & \vdots & a_{32} & \vdots & a_{33} & \vdots & a_{34} \end{pmatrix};$$

分法(1)可记为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},\quad A_{22}=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

即 A_{11}，A_{12}，A_{21}，A_{22} 为 A 的子块，而 A 形式上成为以这些子块为元素的分块矩阵。

例如，设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1&2\\0&1&0&2&3\\0&0&1&3&4\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&2\end{pmatrix},$$

根据矩阵 A 的特点，可采取如下的分法：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&1&2\\0&1&0&\vdots&2&3\\0&0&1&\vdots&3&4\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\vdots&2&0\\0&0&0&\vdots&0&2\end{pmatrix}.$$

显然，$A_{11}=E_3$ 是 3 阶单位矩阵，而

$$A_{12}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\3&4\end{pmatrix}.$$

是 3×2 矩阵；$A_{21}=O_{2\times 3}$ 是零矩阵；$A_{22}=2E_2$. 从而 A 可以看成是由这 4 个子块组成的分块矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_3&A_{12}\\O_{2\times 3}&2E_2\end{pmatrix}.$$

结论：根据研究问题的实际需要，将矩阵进行分块，可以使矩阵的结构变得更加清晰，有利于矩阵的计算。

（二）分块矩阵的运算

1．分块矩阵的加法

设 A，B 都是 $m\times n$ 矩阵，采用相同的分块方法，得到分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1t}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{s1}&A_{s2}&\cdots&A_{st}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&\cdots&B_{1t}\\B_{21}&B_{22}&\cdots&B_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\B_{s1}&B_{s2}&\cdots&B_{st}\end{pmatrix},$$

其中子块 A_{ij} 与 B_{ij} 同型. 规定

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1t}+B_{1t} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2t}+B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & A_{s2}+B_{s2} & \cdots & A_{st}+B_{st} \end{pmatrix}.$$

如果两个同型矩阵的分块方法相同，它们相加时，即把对应的子块相加，而每对子块之间的加法，则按着普通矩阵的加法进行运算。

2. 分块矩阵的数乘

设λ为一个常数，A的分块矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},$$

则规定

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1t} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \lambda A_{s2} & \cdots & \lambda A_{st} \end{pmatrix}.$$

数乘分块矩阵就是用数遍乘矩阵中的每个子块，而数乘子块则按普通矩阵的数乘运算进行 。

3. 分块矩阵的乘法

设A为$m\times s$矩阵，B为$s\times n$矩阵，分块为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

其中A_{i1}，A_{i2}，…，A_{it}的列数分别等于B_{1j}，B_{2j}，…，B_{tj}行数，则规定

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix},$$

其中$C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}$（$i=1$，2，…，$s$；$j=1$，2，…，$r$）.

说明：对 A 的列的分法一定要与对 B 的行的分法一致，而对 A 的行的分法和对 B 的列的分法可以随意。两个分块矩阵相乘，即是以子块为元素按矩阵的乘法规则相乘。此时期相应的子块是可乘的，

并按普通矩阵的乘法规则相乘。可以证明，按分块矩阵乘法所得的结果与不分块作乘法所得的结果是相同的。

例 1 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix},$$

求 AB.

解 把 A，B 分块成

$$A=\begin{pmatrix}1&0&\vdots&0&0\\0&1&\vdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&2&\vdots&1&0\\1&1&\vdots&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&O\\A_1&E\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&\vdots&1&0\\-1&2&\vdots&0&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&\vdots&4&1\\-1&-1&\vdots&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&E\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}E&O\\A_1&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&E\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&E\\A_1B_{11}+B_{21}&A_1+B_{22}\end{pmatrix}.$$

而

$$A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&4\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&1\end{pmatrix},$$

$$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\3&1\end{pmatrix},$$

于是

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\-2&4&3&3\\-1&1&3&1\end{pmatrix}.$$

如果直接计算 A 与 B 的乘积，有

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\-2&4&3&3\\-1&1&3&1\end{pmatrix}.$$

4. 分块矩阵的转置

设分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1t}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{s1}&A_{s2}&\cdots&A_{st}\end{pmatrix},$$

则

$$A^T=\begin{pmatrix}A_{11}^T&A_{21}^T&\cdots&A_{s1}^T\\A_{12}^T&A_{22}^T&\cdots&A_{s2}^T\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1t}^T&A_{2t}^T&\cdots&A_{st}^T\end{pmatrix}.$$

分块矩阵 A 的转置，不仅要把分块矩阵 A 的每一行变为同序号的列，还要把 A 的每一个子块 A_{ij} 取转置.

5. 分块对角矩阵

设 A 为 n 阶矩阵，若 A 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且非零子块都是方阵，即

$$A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{pmatrix},\qquad(2.15)$$

其中 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵，那么称 A 为**分块对角矩阵**.

注意：对角矩阵可以看成是分块对角矩阵的特例(每个子矩阵都是 1 阶方阵)，但是，一般的分块对角矩阵不一定是对角矩阵。

对于分块对角矩阵，可求得

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

由此可知 $|a|\neq 0$ 的充分必要条件是 $|A_i|\neq 0(i=1,2,\cdots,s)$. 从而可知分块对角矩阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A_i|\neq 0(i=1,2,\cdots,s)$ 均可逆. 并且当 A 可逆时，有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 2 设 5 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & & & \\ 3 & 2 & & & \\ & & 7 & & \\ & & & 2 & 3 \\ & & & -3 & -5 \end{pmatrix},$$

求逆矩阵 A^{-1}.

解 将矩阵 A 划分成分块对角矩阵 $A=\operatorname{diag}\left(A_1, A_2, A_3\right)$，其中

$$A_1=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}，\quad A_2=(7)，\quad A_3=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

由公式计算出

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}，\quad A_2^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \end{pmatrix}，\quad A_3^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix},$$

因此

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -5 & & & \\ -3 & 8 & & & \\ & & \frac{1}{7} & & \\ & & & 5 & 3 \\ & & & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

思政内容：在教学过程中向学生渗透“化整为零，化繁为简”的数学思想，即把复杂的问题分解而成若干个简单的问题，然后各个击破，从而使复杂问题简单化，从而得到解决，同时也提高学生对知识的应用能力，培养学生的逻辑推理能力，也培养了学生在今后的实际生活中处理复杂问题的能力.

要想有所成就，就必须脚踏实地地做好身边的每一件小事，只有小事都做好了，才可以成就大目标。每一件小事做好了也一定可以成就大目标.

三、课堂练习

用矩阵的分块求下列矩阵的逆矩阵：

	$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ **四、小结：** 1.分块矩阵的概念 2.分块矩阵的运算 **五、作业** 习题二（A）第25题
教　学 后　记	

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">初等矩阵与线性方程组　内　容　矩阵的初等变换</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">§3.1 矩阵的初等变换</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>1. 矩阵初等变换的定义
2. 初等矩阵
3. 初等变换的应用</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　日　第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标:1.掌握矩阵初等变换与初等矩阵 2.理解行阶梯形与行最简形
能力目标:掌握初等变换法求逆矩阵与解矩阵方程
素质目标（价值观目标）:通过本节课学习，提升学生学习数学的兴趣及应用数学的意识。
思政目标：培养学生高尚的人格和情操，树立起为祖国奋斗的远大理想.</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：矩阵的初等变换与初等矩阵
难点：用初等变换方法求逆矩阵</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">教师课前充分备课，了解学情；学生需要具备矩阵和行列式的简单计算。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、启发式教学、案例教学等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线上线下混合式教学</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">作业：习题三 3（1）（2）（3）（4）
思考：习题三（B）4.　6</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006
2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009
3.同济大学数学系．工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社．2014</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>

问题导入：

1.在计算行列式时，可以将某一行元素都乘以 k，加到另一行上，或者将某一行的公倍数提到行列式外。那么矩阵的元素，也能做类似的变换吗？

2.行列式的某一行元素都乘以 k 加到另一行上，行列式的值不变。如果矩阵的某一行元素都乘以 k 加到另一行上，变换前后的矩阵相等吗?

3.基于问题 1、2，思考能否将一个矩阵中的元素化成只有 0 或者 1？

（请同学们互相讨论，自由回答）

思政元素

介绍中国著名数学著作《九章算术》，九章算术成书于公元 1 世纪左右，书中第八章方程采用分离系数的方法表示线性方程组，相当于现在所讲的矩阵，解线性方程组时采用了直除法，与本次课将要介绍的矩阵初等行变换一致。这是世界上最早的完整线性方程组的解法。而在西方是直到 17 世纪才由莱布尼兹提出完整的线性方程组的求解法则。单就线性代数的发展而言，中国是早于其他国家的。之后以线性方程组的求解为例引入矩阵的初等变换，矩阵初等变换包含初等行变换和初等列变换，各三种类型。

（思政目标：弘扬中国文化，增强民族自豪感及文化自信心；激发学生学习数学的热情，培养学生科学严谨的治学态度）

新知讲解：

矩阵的初等变换是处理矩阵问题的一种基本方法，它在矩阵的秩、逆矩阵和线性方程组的求解中发挥着极其重要的作用.

一、矩阵的初等变换

定义 1　设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，则以下三种变换称为矩阵 A 的初等行(列)变换.

(1) 交换 A 的两行(列)；

(2) 用一个非零常数 k 乘以 A 的某一行(列)；

(3) 用一个数乘以 A 的某一行(列)的各元素后再加到 A 的另一行(列)对应的元素上去.

矩阵的初等行变换与初等列变换，统称为初等变换.

为了书写方便，常用下面的记号表示矩阵的初等变换. 交换 i，j 两行(列)记为 $r_i \leftrightarrow r_j$ （$c_i \leftrightarrow c_j$），用非零常数 k 乘矩阵的第 i 行(列)记为

</td>
</tr>
</table>

教学流程	$r_i\times k$（$c_i\times k$），第 j 行（列）的 k 倍加到第 i 行（列）上去记为 r_i+kr_j（c_i+kc_j）. 矩阵的三种初等变换都是可逆的，且其逆变换是同一类型的初等变换，具体地说，有下面性质： (1) 若 $A\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}B$，则 $B\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}A$； (2) 若 $A\xrightarrow{r_i\times k}B$，则 $B\xrightarrow{r_i\times\frac{1}{k}}A$； (3) 若 $A\xrightarrow{r_i+kr_j}B$，则 $B\xrightarrow{r_i-kr_j}A$. 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，则称矩阵 A 与 B 等价，记作 $A\cong B$. （课堂思考：初等变换下矩阵是等价的，那么初等变换到底改变什么而什么没有变，造成的影响是什么？） **思政目标：**从矩阵初等变换下的等价性引出变与不变的辩证关系，融入辩证唯物主义哲学思想，让学生明白学好辩证法是深入理解线性代数的关键。 矩阵之间的等价关系具有下列性质： (1) 反身性：$A\cong A$； (2) 对称性：若 $A\cong B$，则 $B\cong A$； (3) 传递性：若 $A\cong B$，$B\cong C$，则 $A\cong C$. 例如，设矩阵 $$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&2&0&-2\\1&4&3&-4\end{pmatrix},$$ 对矩阵 A 施行初等行变换，有 $$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&2&0&-2\\1&4&3&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&2&1&-2\\1&4&3&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&1&1&-1\\0&3&3&-3\end{pmatrix}$$ $$\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=A_1.$$ 称 A_1 为一个行阶梯形矩阵，它有以下特点： (1) 矩阵的所有元素全为 0 的行(如果存在的话)都集中在矩阵的最下面； (2) 每行左起第一个非零元素(称为首非零元)的下方元素全为 0. 即 $$A_1=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

教学流程

若对 A_1 再施行初等行变换，得

$$A_1 \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_2 .$$

行阶梯形矩阵 A_2 称为矩阵 A 的**行最简形矩阵**. 若对 A_2 再施行初等列变换，得

$$A_2 \xrightarrow[\substack{c_3-c_2 \\ c_4+c_2}]{c_2+c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_3 .$$

我们称 A_3 为矩阵 A 的**等价标准形矩阵**. 其特点是 A_3 的左上角是一个单位矩阵，其余元素全为 0。

对于 $m \times n$ 矩阵 A，总可经过初等变换(行变换和列变换)把它化为等价标准形

$$C = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

显然，行最简形矩阵只需再作适当的初等列变换，就能化为标准形矩阵.

注：在理论表述或证明中，常用记号“~”，在对矩阵作初等变换运算的过程中常用记号“$\rightarrow$”.

强调书写格式，利用矩阵初等变换的规范性引入德育元素：诚信，严谨，科学。

（思政目标：让学生体会科学的方法论中严谨，实事求是的重要性，从而达到培养科学思维方式的目的。）

二、初等矩阵

定义 2 对单位矩阵 E 施行一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

初等矩阵包括以下三类矩阵.

(1) 将单位矩阵 i, j 两行(列)对换得到的矩阵，记作 $E(i,j)$；

$$E(i,j)=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & 1 & & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & \vdots & & & 1 & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \\ \\ \leftarrow 第j行 \\ \\ \\ \end{array}$$

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘单位矩阵 E 的第 i 行(列)得到的矩阵，记作 $E(i(k))$.

教学流程	

$$E(i(k))=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow 第i行\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

⑶ 将单位矩阵 E 第 j 行的 k 倍加到第 i 行(或第 i 列的 k 倍加到第 j 列)

得到的矩阵称为初等消去矩阵，记作 $E(i,j(k))$.

$$E(i,j(k))=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow 第i行\\ \\ \leftarrow 第j行\\ \\ \\ \end{array}$$

初等矩阵具有以下性质：

⑴ 初等矩阵的转置矩阵仍为初等矩阵；

⑵ 初等矩阵均为可逆矩阵，并且其逆矩阵仍为同类型的初等矩阵. 其中

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j)\ ;$$

$$E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))\quad（k\neq 0）;$$

$$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k))\ .$$

例 1　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$

求 $E\left(1,3\right)A$；$AE\left(1,3\right)$；$E\left(2\left(k\right)\right)A$；$AE\left(1,3\left(k\right)\right)$.

解　将矩阵按行分块得

$$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix},$$

按列分块得

$$A=\left(B_1,B_2,B_3\right),$$

则根据矩阵的分块乘法有

教学流程	$$E(1,3)A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_3\\A_2\\A_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix},$$ $$AE(1,3)$$ $$=(B_1,B_2,B_3)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=(B_3,B_2,B_1)=\begin{pmatrix}a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}\end{pmatrix}$$ $$E(2(k))A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\kA_2\\A_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ka_{21}&ka_{22}&ka_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$ $$AE(1,3(k))=(B_1,B_2,B_3)\begin{pmatrix}1&0&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(B_1,B_2,kB_1+B_3)$$ $$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&ka_{11}+a_{13}\\a_{21}&a_{22}&ka_{21}+a_{23}\\a_{31}&a_{32}&ka_{31}+a_{33}\end{pmatrix}.$$ **（课堂活动：由一般到特殊，让学生互相讨论，自由回答得出一般结论）** 可以验证以下结论： ⑴ 以 m 阶初等矩阵 $E(i,j)$ 左乘矩阵 $A_{m\times n}$，其结果是互换 A 的 i，j 两行；以 n 阶初等矩阵 $E(i,j)$ 右乘 $A_{m\times n}$，其结果就是互换 A 的 i，j 两列. ⑵ 以 m 阶初等矩阵 $E(i(k))$ 左乘 $A_{m\times n}$，其结果就是将 A 的第 i 行乘以数 k；以 n 阶初等矩阵 $E(i(k))$ 右乘 $A_{m\times n}$，其结果就是将 A 的第 i 列乘以数 k. ⑶ 以 m 阶初等矩阵 $E(i,j(k))$ 左乘 $A_{m\times n}$，其结果就是将 A 的第 j 行的乘以数 k 加到第 i 行；以 n 阶初等矩阵 $E(i,j(k))$ 右乘 $A_{m\times n}$，其结果就是将 A 的第 i 列乘以数 k 加到第 j 列. **定理 1** 用初等矩阵左乘 A，相当于对 A 施行相应的初等行变换；用初等矩阵右乘 A，相当于对 A 施行相应的初等列变换. **三、初等变换的应用**

教学流程	**1. 求逆阵** 在第二章第二节中，给出了矩阵 A 可逆的充要条件的同时，也给出了利用伴随矩阵求逆矩阵 A^{-1} 的一种方法，即 $A^{-1}=\frac{1}{\vert A\vert}A^{*}$，该方法称为伴随矩阵法. **课堂活动：提问学生，复习旧知，引出新知** **思政目标：引导学生自主讨论，培养学生自主学习的能力和协同合作的精神** 对于较高阶的矩阵，用伴随矩阵法求逆矩阵计算量太大，下面介绍一种较为简便的方法初等变换法 **定理 2** 若方阵 A 可逆，A 可以经过有限次的初等行变换(初等列变换)化为单位矩阵 E，即 $A\cong E$. **证明** 对于任何 n 阶方阵 A 都存在初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$，使得 $$P_l\cdots P_2P_1A=U \quad (n\text{ 阶行最简形矩阵}).$$ **推论 1** 可逆矩阵 A 可表示为有限个初等矩阵的乘积. **证明** 由定理 2 可知，若 A 可逆，则存在初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$，使 $$P_l\cdots P_2P_1A=E,$$ 由于初等矩阵均为可逆矩阵，所以有 $$A=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_l^{-1}E=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_l^{-1}.$$ 设 A 可逆，则 $A\cong E$，所以存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$，使 $$P_l\cdots P_2P_1A=E, \tag{1}$$ 两端同时右乘 A^{-1}，便有 $$P_l\cdots P_2P_1E=A^{-1}. \tag{2}$$ (1)式表明 A 经过一系列初等行变换变成 E，(2)式则表明 E 经过同一系列初等行变换变成 A^{-1}. 利用分块矩阵形式，(1)式和(2)式合并为 $$P_l\cdots P_2P_1(A,E)=(E,A^{-1}),$$ 即对 $n\times 2n$ 矩阵 (A,E) 施行初等行变换，当把 A 变成 E 时，原来的 E 就变成 A^{-1}.

教学流程

例 2 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解

$$(A\ E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-4&-2&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&-1&0&1\\0&-3&-4&-2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+3r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&-1&-5&1&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+3r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&-14&3&9\\0&1&0&-6&1&4\\0&0&-1&-5&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-2&1&1\\0&1&0&-6&1&4\\0&0&-1&-5&1&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-2&1&1\\0&1&0&-6&1&4\\0&0&1&5&-1&-3\end{array}\right)$$

故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-6&1&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}.$$

例 2 的讲解一定要详细完整，带领学生对刚刚总结得出的解法准确运用，熟悉逆矩阵求解步骤。

2. 用初等变换法解矩阵方程

设矩阵 A 可逆，则求解矩阵方程 $AX=B$ 等价于求矩阵 $X=A^{-1}B$，即

$$(A\,\vdots\,B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\,\vdots\,A^{-1}B).$$

这样就给出了用初等行变换求解矩阵方程 $AX=B$ 的方法.

例 3 求矩阵 X，使 $AX=B$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}$.

解 $$(A\ B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&-2&-6&-2&-12\end{array}\right)$$

教学流程	

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

即得 $\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$$X=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

课堂活动：提问本节使用初等变换解决求矩阵的逆和解矩阵方程，各自的步骤是什么？优缺点是什么？

思政目标：通过比较不同的方法计算逆矩阵和矩阵方程的计算，锻炼学生的计算能力，培养学生认真细致的学习态度。

课堂评测

1. 化下列矩阵 A 为矩阵的标准形式 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

2. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

通过课堂练习，帮助学生及时复习，并提前熟悉下次课内容。

内容小结

1. 初等变换

（1）交换矩阵中的第 i 行（列）与第 j 行（列）的元素，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ 或 $c_i \leftrightarrow c_j$；

（2）用一个非零常数 k 乘矩阵的第 i 行（列），记作 kr_i 或 kc_i；

（3）矩阵的第 j 行（列）元素的 k 倍加到第 i 行（列）对应元素上，记作 r_i+kr_j 或 kc_j+c_i. （注意：第 i 行（列）的元素并没有改变）.

矩阵的初等行或列变换统称为**初等变换**.

矩阵等价

若矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，则称矩阵 A 与 B **等价**，记为

教学流程	$A \sim B$（或 $A \to B$）. **等价关系的性质** (1) 反身性 $A \sim A$; (2) 对称性 若 $A \sim B$,则 $B \sim A$; (3) 传递性 若 $A \sim B$, $B \sim C$,则 $A \sim C$. **行阶梯形矩阵：**可画出一条阶梯线，线的下方全为零，每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数阶梯线的竖线（每段竖线的长度为一行）后面的第一个元素为非零元，也是非零行的第一个非零元。 **行最简形矩阵：**行阶梯矩阵中非零行的第一个非零元为 1，且这些非零元所在的列的其他元素都为 0. **标准型：**对行最简形矩阵再施以初等列变换，可以变换为形如 $F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$ 的矩阵，称为标准型。标准形矩阵是所有与矩阵 A 等价的矩阵中形状最简单的矩阵。 **2.初等矩阵** 由单位矩阵经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵。 **初等矩阵的性质** （1）对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵； 即$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow$ 存在m阶可逆矩阵P，使$PA=B$; （2）对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵； 即 $A \overset{c}{\sim} B \Leftrightarrow$ 存在n阶可逆矩阵Q，使$AQ=B$; **3.初等变换的应用** （1）求逆矩阵： $$(A\mid E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(E\mid A^{-1}\right)$$ （2）解矩阵方程

	$$(A\quad B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\quad A^{-1}B)$$
教　学 后　记	1.本节概念较多，注意初等变换，初等矩阵，矩阵等价等概念以及逆矩阵及矩阵乘法的应用的具体解法。 2.通过比较不同的方法计算逆矩阵和矩阵方程的计算，锻炼学生的计算能力，培养学生认真细致的学习态度。

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">初等矩阵与线性方程组　　内　容　　矩阵的秩</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">§3.2 矩阵的秩</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>1.矩阵的秩的概念
2.用初等变换求矩阵的秩</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　日　第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标:1 理解矩阵秩的定义 2 熟练掌握初等变换求矩阵的秩.
能力目标:培养学生的数学语言表达能力；培养学生的自学与自律、协作科研能力.
素质目标:通过本节课学习,提升学生学习数学的兴趣及应用数学的意识.
思政目标：熟悉辩证唯物主义哲学思想，树立正确价值观.</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：矩阵的秩的概念及其求法
难点：矩阵的秩的概念及其求法</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">教师课前充分备课，了解学情；学生需要具备矩阵和行列式的简单计算。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、启发式教学、案例教学等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线上线下混合式教学</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">讨论：习题三 1　（1）（2）（3）（4）9
作业：习题三 1　（1）（2）（3）（4）9
思考：(B)9.　10.　11</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006
2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009
3.同济大学数学系. 工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社. 2014</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

教学流程	问题导入： 1. 两个矩阵相等的定义是什么？矩阵等价的定义是什么？ 2. 矩阵等价的性质有哪些？ 3. 猜想矩阵经过初等变换后有哪些核心的性质没有改变？ （请同学们互相讨论，自由回答） 思政元素：通过类比学生在大学四年生活中的每一次变化，例如，学到了新的技能、掌握了新的知识，都像是做了一次初等变换每一次变化不是显著的，但是这一次次“初等变换”，使同学们变得更有学识和能力。 （思政目标：弘扬中国文化，增强民族自豪感及文化自信的热情，培养学生科学严谨的治学.） 矩阵的秩的概念是讨论向量组的线性相关性、深入研究线性方程组等问题的重要工具． 从上节已看到，矩阵可经初等行变换化为行阶梯形矩阵，且行阶梯形矩阵所含非零行的行数是唯一确定的，这个数实质上就是矩阵的“秩”,鉴于这个数的唯一性尚未证明，在本节中，我们首先利用行列式来定义矩阵的秩，然后给出利用初等变换求矩阵的秩的方法. **新知讲解：** **一、矩阵的秩的概念** **定义 1** 在 $m\times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行 k 列（$1\leqslant k\leqslant \min\{m,n\}$），位于这些行、列交叉处的 k^2 各元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得到的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的一个 **k 阶子式**. $m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^kC_n^k$ 个. **定义 2** 如果矩阵 A 中有一个 r 阶子式 $D_r\neq 0$，而所有 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)的值全等于 0，则称 D_r 为矩阵 A 的一个最高阶非零子式，其阶数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $R(A)$. **概念辨析：子块，子式，余子式** **例 1** 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}$ 的秩. **解** 在 A 中，子式 $\begin{vmatrix}1&3\\2&-5\end{vmatrix}\neq 0$，又 A 的三阶子式只有一个 $\|A\|$， 且 $\|A\|=0$，所以

教学流程	$$R(A)=2.$$ **例 2** 求矩阵 $B=\begin{pmatrix}2&-1&0&3&-2\\0&3&1&-2&5\\0&0&0&4&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的秩. **解** 因为 B 是一个行阶梯矩阵，其非零行只有三行，B 的所有四阶子式全为零. 此外，又存在 B 的一个三阶子式： $$\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&3&-2\\0&0&4\end{vmatrix}\neq 0$$ 所以 $$R(B)=3.$$ **矩阵 A 的秩具有以下性质：** (1) 若矩阵 A 中有一个 s 阶非零子式，则 $R(A)\geqslant s$； (2) 若 A 中所有 t 阶子式全为 0，则 $R(A)<t$； (3) 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 $0\leqslant R(A)\leqslant \min\{m,n\}$； (4) $R(A)=R(A^T)$. 利用定义计算矩阵的秩，需要由高阶到低阶考虑矩阵的子式，当矩阵的行数与列数较高时,按定义求秩是非常麻烦的. 由于行阶梯形矩阵的秩很容易判断,而任意矩阵都可以经过初等变换化为行阶梯形矩阵. 因而可考虑借助初等变换法来求矩阵的秩. **二、用初等变换求矩阵的秩** **定理 1** 若 A 与 B 是同型矩阵，A 与 B 等价的充分必要条件是 $R(A)=R(B)$.（证略） 思政元素：类比学生在大学四年生活中的每一次变化，例如，学到了新的技能、掌握了新的知识，都像是做了一次初等变换， 每一次变化不是显著的，但就是这一次次“初等变换”，使同学们变得更有学识和能力。 但正如 矩阵的初等变换不会改变秩一样，同学们在不断追求进步，不断顺应时代与科技的发展变化而改变自己的同时，不变的应该是为实现中华民族伟大复兴而奋斗的理想信念、为国家信息技术领域贡献力量的初心使命。 习近平总书记指出：“心 有所信，方能行远。 面向未来，走好新时代的长征路，我们更需要坚定理想信念、矢志拼搏奋斗”。 **推论** 设在可逆矩阵 P, Q 使 $PAQ=B$，则 $R(A)=R(B)$. 课堂活动：等价矩阵具有相同的秩，提问学生其逆命题对否，引导学生来发

教学流程

现其中的“漏洞”，即矩阵的“型号”可以不同，故而不等价. 再进一步引导学生补全漏洞，如果已知两个矩阵是同型号的，该结论是否成立呢？由此引导学生不断完善条件、严谨求实、规范书写、严格求证，从而最终完成整个充要条件的证明

证明　因为可逆矩阵 P，Q 可表示成一些初等矩阵的乘积，即存在初等矩阵 $P_1,P_2,\dots,P_s$，$Q_1,Q_2,\dots,Q_t$，有

$$P=P_1P_2\cdots P_s$$

$$Q=Q_1Q_2\cdots Q_t$$

$PAQ=\left(P_1P_2\cdots P_s\right)A\left(Q_1Q_2\cdots Q_t\right)$ 表示对 A 进行一系列初等行变换和列变换，而 $PAQ=B$，故得到 $A\to B$，于是根据定理 1，有 $R\left(A\right)=R\left(B\right)$.

思政元素：进行初等变换前后的矩阵是等价的，其矩阵秩是相等的，这就是所谓形变质不变。从矩阵初等变换下的等价性引出变与不变的辩证关系，融入辩证唯物主义哲学思想，让学生明白学好辩证法是深入理解线性代数的关键。

例 3　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

求 $R\left(A\right)$.

解　对 A 施行初等行变换化成行阶梯形矩阵.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+2r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

教学流程

因为行阶梯形矩阵有 3 个非零行，所以 $R(A)=3$.

课堂活动：通过比较繁琐的计算锻炼学生的计算能力，培养学生认真细致的学习态度。

设 A 为 $m\times n$ 矩阵，当 $R(A)=m$ 时，称 A 为行满秩矩阵；当 $R(A)=n$ 时，称 A 为列满秩矩阵.

若 A 为 n 阶矩阵，且 $R(A)=n$，则称 A 为**满秩矩阵**. 它既是行满秩的又是列满秩的. 显然，方阵为满秩矩阵的充分必要条件为 $|A|\neq 0$. 由此得，方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 为满秩矩阵.

定理 2　设有任意矩阵 A，B，则

(1) $\max\{R(A), R(B)\}\leqslant R(A,B)\leqslant R(A)+R(B)$；

(2) $R(A+B)\leqslant R(A)+R(B)$；

(3) $R(AB)\leqslant \min\{R(A), R(B)\}$；

(4) 若 $AB=0$，则 $R(A)+R(B)\leqslant n$. (证明略)

例 3　设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 3 & \lambda & -1 & 2\\ 5 & 3 & \mu & 6\end{pmatrix}$，已知 $R(A)=2$，求 λ 与 μ 的值.

解

$$A\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & \lambda+3 & -4 & -4\\ 0 & 8 & \mu-5 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & \lambda+3 & -4 & -4\\ 0 & 5-\lambda & \mu-1 & 0\end{pmatrix},$$

$R(A)=2$，故 $5-\lambda=0$，$\mu-1=0$，即 $\lambda=5$，$\mu=1$.

讨论型题目能使学生对抽象性理论知识的理解变的比较深刻具体，培养学生严谨的数学思维。

例 4　设 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3\\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4\end{pmatrix}$，求矩阵 A 的秩，并求 A 的一个最高阶非零子式.

解　对 A 作初等变换，变成行阶梯形矩阵.

教学流程

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 - 3r_1]{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 4r_2]{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由行阶梯形矩阵有三个非零行知 $R(A)=3$. 再求 A 的一个最高阶非零子式。由 $R(A)=3$ 知，A 的最高阶非零子式为三阶.

计算 A 中前三行构成的子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 .$$

则这个子式便是 A 的一个最高阶非零子式.

课堂练习

1. 将矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 8 & 7 \\ 2 & 6 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵。

通过课堂练习，帮助学生及时复习，并提前熟悉下次课内容。

内容小结：

一、矩阵的秩的概念

定义 2 如果矩阵 A 中有一个 r 阶子式 $D_r \neq 0$，而所有 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)的值全等于 0，则称 D_r 为矩阵 A 的一个最高阶非零子式，其阶数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $R(A)$.

矩阵 A 的秩具有以下性质：

教学流程	⑴ 若矩阵 A 中有一个 s 阶非零子式，则 $R\left(A\right) \geqslant s$； ⑵ 若 A 中所有 t 阶子式全为 0，则 $R\left(A\right) < t$； ⑶ 若 A 为 $m \times n$ 矩阵，则 $0 \leqslant R\left(A\right) \leqslant \min\left\{m,n\right\}$； ⑷ $R\left(A\right) = R\left(A^{T}\right)$. **二、用初等变换求矩阵的秩** **定理 1** 若 A 与 B 是同型矩阵，A 与 B 等价的充分必要条件是 $R\left(A\right) = R\left(B\right)$.（证略） **推论** 设在可逆矩阵 P, Q 使 $PAQ = B$，则 $R\left(A\right) = R\left(B\right)$.
教　学 后　记	1.本节概念容易混淆，注意子式，余子式，最大的不为零的的子式等概念的区分及辨别以及矩阵秩的具体解法。 2.通过比较不同的方法计算矩阵秩的方法，锻炼学生的计算能力，培养学生认真细致的学习态度。

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="3">初等矩阵与线性方程组　　内　容　线性方程组的消元法</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">§3.3 线性方程组的消元法</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>1．线性方程组的概念
2. 高斯消元法
3. 习题课</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　　日　第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标:掌握线性方程组消元法,了解线性方程组有解的判别定理的推导过程
能力目标:培养学生的数学语言表达能力；培养学生的自学与自律、协作科研能力.
素质目标:让学生重视数学基础课程，了解线性代数的应用背景
思政目标：熟悉辩证唯物主义哲学思想，树立正确价值观.</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：用消元法求线性方程组的一般解的方法。
难点：非齐(齐)次线性方程组解的判定</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">教师课前充分备课，了解学情；学生需要具备矩阵和行列式的简单计算。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、启发式教学、案例教学等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线上线下混合式教学</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">讨论：习题三 11（1）（2）（3）（4）
作业：习题三 11（1）（2）（3）（4）
思考：(B) 19</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006
2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009
3.同济大学数学系. 工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社. 2014</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

教学流程

问题导入：

中学阶段，我们利用代入消元法求解线性方程组，第一章学习的克莱姆法则也能求解一些方程组，那么还有没有其他更高效的方法呢？（请同学们互相讨论，自由回答）

思政导入：求解线性方程组的问题在科学领域和工程领域都是普遍存在的。随着现代大数据的发展，在经典的计算机上求解基于大数据的线性方程组是非常困难的，因为经典的求解算法的求解时间是与数据规模成正比的。最近提出的一种量子算法表明，量子计算机可以在对数阶数的时间尺度上求解线性系统，从而对经典算法实现指数加速。该文实现了利用量子算法求解线性方程组，在量子计算机上求解 2*2 的线性方程组。该文使用四个量子比特和四个受控逻辑门来实现所需的每一个子程序，说明了该算法的工作原理。

思政目标：掘线性代数在现代科学中的应用，并为学生们讲解，让他重视数学基础课程，这样才能取得良好的教学效果。

新知讲解：

线性方程组的消元法，又称高斯（德国数学家.Gauss,1777--1855）消元法，是解线性方程组的一种简便方法.

一 、线性方程组的概念

一般地，一个线性方程组可以写成下述形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (3.1)$$

(3.1)式中，a_{ij} 称为方程组的系数，x_i 称为这个方程组的未知量，b_i 称为方程组的常数项，这是一个含有 n 个未知量，m 个方程构成的线性方程组.

常数项不全为零的方程组称为**非齐次线性方程组.**

如果将线性方程组（3.1）的常数项全部改为零，得到其次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

称（3.2）为与（3.1）相应的齐次线性方程组,或（3.1）称为的导出的组.

如果令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则线性方程组（3.1）可以写成矩阵方程的形式

$$AX=b \qquad (3.3)$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为这个方程组的**系数矩阵**，称$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$是这个方程组的增广矩阵.

教学流程	如果 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 使得方程组（3.1）中每一个方程都成立，则称这 n 个数 $c_1,c_2,\cdots$，c_n 是方程组（3.1）的解。或者说 $x=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\cn\end{pmatrix}$ 是（3.1）的**解**（或**解向量**）. 如果线性方程组（3.1）有解，我们就称方程组（3.1）是相容的.否则，就称方程组（3.1）是不相容的. 一个线性方程组的解的全体构成的合集称为是这个线性方程组的**解集合**.两个具有相同集合的线性方程组称为是同解的. 表示线性方程组的全部解的表达式称为线性方程组的**通解**. 思政元素：中国科学技术大学常务副校长潘建伟院士领衔的量子信息团队开发了量子计算机，为了对其进行测试，就利用量子计算机求解了线性方程组。相关成果发表在物理学领域的顶级杂志 Physical Review Letters 上。以此为据，讲述线性方程组的应用，能够让学生了解数学基础理论的应用，燃起学习基础理论的兴趣。 **二 、高斯消元法** **例 1** 解线性方程组 $$\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=6\\x_1-2x_2+4x_3=3\\5x_1+7x_2+x_3=28\end{cases}\qquad(1)$$ **解：**方程组（1）中第一个方程分别乘以 $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(-\frac{5}{2}\right)$ 加于第二个方程和第三个方程，得 $$\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=6\\-3x_2+\frac{9}{2}x_3=0\\2x_2+\frac{7}{2}x_3=13\end{cases}\qquad(2)$$ 再将方程组（2）中第二个方程乘以 $\frac{2}{3}$ 加到第三个方程，得 $$\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=6\\-3x_2+\frac{9}{2}x_3=0\\\frac{13}{2}x_3=13\end{cases}\qquad(3)$$ 方程组（3）是一个阶梯形方程组，从方程组的第三个方程可以得到 x_3 的值，

教学流程	然后再逐次代入前两个方程，求出 x_2， x_1，则得到方程组（1）的解. 将方程组（3）中第三个方程乘以 $\frac{2}{13}$，得 $$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=6 \\ -3x_2+\frac{9}{2}x_3=0 \\ x_3=2 \end{cases} \qquad (4)$$ 将方程组（4）中第三个方程分别乘以 1 和 $\left(-\frac{9}{2}\right)$ 加于第一个方程和第二个方程，得 $$\begin{cases} 2x_1+2x_2=8 \\ -3x_2=-9 \\ x_3=2 \end{cases} \qquad (5)$$ 将方程组（5）的第二个方程乘以 $-\frac{1}{3}$，得 $$\begin{cases} 2x_1+2x_2=8 \\ \quad x_2=3 \\ \quad x_3=2 \end{cases} \qquad (6)$$ 将方程组 （6）中第二个方程乘以 (-2) 加到第一个方程，得 $$\begin{cases} 2x_1=2 \\ x_2=3 \\ x_3=2 \end{cases} \qquad (7)$$ 最后以 $\frac{1}{2}$ 乘方程组（7）中第一个方程，得 $$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=3 \\ x_3=2 \end{cases} \qquad (8)$$ 显然，方程组（1）~（8）都是同解方程组，因而（8）是方程组（1）的解. 这种解法称为消元法，（1）~（4）是消元过程，（5）~（8）是回代过程.上面的求解过程，可以用方程组（1）的增广矩阵的初等行变换表示：

教学流程

$$
(A\ \ b)=\begin{bmatrix}2&2&-1&6\\1&-2&4&3\\5&7&1&28\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&2&-1&6\\0&-3&\frac{9}{2}&0\\0&2&\frac{7}{2}&13\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&2&-1&6\\0&-3&\frac{9}{2}&0\\0&0&\frac{13}{2}&13\end{bmatrix}
$$

$$
\to\left[\begin{array}{ccc:c}2&2&-1&6\\0&-3&\frac{9}{2}&0\\0&0&1&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}2&2&0&8\\0&-3&0&-9\\0&0&1&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}2&2&0&8\\0&1&0&3\\0&0&1&2\end{array}\right]
$$

$$
\to\left[\begin{array}{ccc:c}2&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&2\end{array}\right]
$$

由最后一个矩阵得到方程组的解

$$x_1=1,x_2=3,x_3=2.$$

设计意图：带领学生自主研究，总结得出齐次方程的解法。培养学生主动学习的能动性和积极性。

定理 1　n 元线性方程组　$Ax=b$

（1）　无解的充分必要条件是 $R(A)<R(A,b)$;

（2）　有唯一解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)=n$;

（3）　有无限多解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)<n.$

设计意图：引导学生自主讨论，培养学生自主学习的能力和协同合作的精神

设 $R(A)=r$，为叙述方便，不妨设 $B=(A,b)$ 的行最简形为

$$
\overline{B}=\begin{bmatrix}
1&0&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1,n-r}&d_1\\
0&1&\cdots&0&b_{21}&\cdots&b_{2,n-r}&d_2\\
\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\
0&0&\cdots&1&b_{r1}&\cdots&b_{r,n-r}&d_r\\
0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&d_{r+1}\\
0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\\
\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\
0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0
\end{bmatrix}
$$

教学流程	（1）若 $R(A)<R(A,b)$;则 $\overline{B}$ 中的 $d_{r+1}=1$，于是 $\overline{B}$ 的第 r+1 行对应矛盾方程 0=1，故方程组无解 （2）若 $R(A)=R(A,b)=r=n$;则 $\overline{B}$ 中的 $d_{r+1}=0$，且 b_{ij} 都不出现，于是 $\overline{B}$ 对应方程组 $$\begin{cases} x_1=d_1, \\ x_2=d_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n=d_n, \end{cases}$$ 故方程组有唯一解. （3）若 $R(A)=R(A,b)=r<n.$，则 $\overline{B}$ 中的 $d_{r+1}=0$，$\overline{B}$ 对应方程组 $$\begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n+d_1, \\ x_2=-b_{21}x_{r+1}-\cdots-b_{2,n-r}x_n+d_{2,} \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n+d_{r,} \end{cases} \qquad (3.4)$$ 令自由未知数 $x_{r+1}=c_1,\cdots,x_n=c_{n-r}$，即得方程组的含 $n-r$ 个参数的解 $$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -b_{11}c_1-\cdots-b_{1,n-r}c_{n-r}+d_1, \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1-\cdots-b_{r,n-r}c_{n-r}+d_{r,} \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix},$$ 即 $$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}+\cdots+c_{n-r}\begin{bmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (3.5)$$ 由于参数 $c_1,\cdots,c_{n-r}$ 可任意取值，故方程组有无穷多个解。 证毕 当 $R(A)=R(B)=r<n$ 时，由于含 $n-r$ 个参数的解（3..5）可表示线性组（3.4）的任一解：从而也可表示线性方程组（3.3）的任一解，因此解（3.5）称为线性方程组（3.3）的通解. **例 1** 解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+4x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-3x_2+2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+x_2+x_3+4x_4=0 \end{cases}$

教学流程

解

$$A=\begin{bmatrix}2&4&-1&1\\1&-3&2&3\\3&1&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&-3&2&3\\2&4&-1&1\\3&1&1&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-3r_1}\begin{bmatrix}1&-3&2&3\\0&10&-5&-5\\0&10&-5&-5\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{\frac{1}{10}r_2}\begin{bmatrix}1&-3&2&3\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+3r_2}\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由此可得原方程组的同解方程组

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}x_3-\dfrac{3}{2}x_4\\x_2=\dfrac{1}{2}x_3+\dfrac{1}{2}x_4\end{cases}$$

令自由未知量 $x_3=c_1,x_4=c_2$，则原方程组的全部解（通解）为：

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}c_1-\dfrac{3}{2}c_2\\x_2=\dfrac{1}{2}c_1+\dfrac{1}{2}c_2\\x_3=c_1\\x_4=c_2\end{cases}\qquad（c_1,c_2\text{ 为任意常数}）$$

例 2　解线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-x_4+2x_5=2\\2x_1+x_2+2x_3-2x_4-2x_5=8\\3x_1-x_2+5x_3-3x_4+x_5=6\end{cases}$$

解　对方程组的增广矩阵施以初等行变换：

教学流程

$$\left(A,b\right)=\left(\begin{array}{ccccc:c}1&-2&3&-1&2&2\\2&1&2&-2&-1&8\\3&-1&5&-3&1&6\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccccc:c}1&-2&3&-1&2&2\\0&5&-4&0&-5&4\\0&5&-4&0&-5&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccccc:c}1&-2&3&-1&2&2\\0&5&-4&0&-5&4\\0&0&0&0&0&-4\end{array}\right)$$

可以看出，$r(A)=2,r(A,b)=3$，所以方程组无解.

设计意图：例 1—2 的讲解一定要详细完整，带领学生对刚刚总结得出的解法准确运用，熟悉线性方程组求解步骤及判断。

例 3　求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4,\\x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0\end{cases}$$

解　对增广矩阵施以初等行变换

$$\left(A,b\right)=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-3&-1&1\\3&-1&-3&4&4\\1&5&-9&-8&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-3&-1&1\\0&-4&6&7&1\\0&4&-6&-7&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\div(-4)]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-3&-1&1\\0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccccc}1&0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{4}&\frac{5}{4}\\0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

得到原方程组的同解方程组

$$\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{4}x_4+\frac{5}{4}\\x_2=\frac{3}{2}x_3+\frac{7}{4}x_4-\frac{1}{4},\end{cases}$$

令自由未知量 $x_3=c_1,x_4=c_2$，则原方程组的全部解为：

$$\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}c_3-\frac{3}{4}c_4+\frac{5}{4}\\x_2=\frac{3}{2}c_3+\frac{7}{4}c_4-\frac{1}{4}\\x_3=c\\x_4=c_2\end{cases}$$

例 4　设含参数 λ 的线性方程组

教学流程	$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$ 问 λ 分别取何值时，方程组有唯一解、无解、无穷解？并在有无穷多解时求其通解. **解**　因其系数矩是方阵，由克拉默法则可知.方程组有唯一解的充分必要条件是系数方阵的行列式 $\lvert A\rvert \neq 0$.因为 $$\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$$ 所以，当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq$ -2 时，方程组有唯一解， 当 $\lambda = 1$ 时，对方程组的增广矩阵施以初等行变换，得 $$(A,\ b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 此时，$R(A) = R(A,b) = 1 < 3$，故方程组有无穷多解，取 x_1, x_2 为自由未知变量，可得通解为 $$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 + 1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$ 当 $\lambda = -2$ 时，对方程组的增广矩阵施以初等行变换，得 $$(A,\ b) = \left(\begin{array}{ccc\|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \overset{r_1 \leftrightarrow r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ $$\overset{\substack{-r_1+r_2 \\ 2r_1+r_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array}\right) \overset{r_2+r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$ 此时，$R(A) = 2$，而 $R(A,b) = 3$，故方程组无解. 设计意图：通过对几个例题进行分析，巩固对齐次方程的理解。 **课堂练习**

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>

求解线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=-3 \\ x_2+3x_3+2x_4=5 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4=-1 \end{cases}$.

根据本次课所学知识，思考相应问题并解答，通过课堂练习，帮助学生及时复习，并提前熟悉下次课内容。

内容小结：

一 、线性方程组的概念

一般地，一个线性方程组可以写成下述形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_{1,} \\ a_{21}x_2+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \quad (3.1)$$

常数项不全为零的方程组称为非齐次线性方程组.

如果将线性方程组（3.1）的常数项全部改为零，得到其次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad (3.2)$$

如果令

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \\ a_{m1}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则线性方程组（3.1）可以写成矩阵方程的形式

$$AX=b \quad (3.3)$$

称 A 为这个方程组的系数矩阵，称(A,b)是这个方程组的增广矩阵.

二 、高斯消元法

定理 1　n 元线性方程组　$Ax=b$

（1）无解的充分必要条件是 $R(A)<R(A,b)$;

（2）有唯一解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)=n$;

（3）有无限多解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)<n$.

第三章习题课：（A）

1. 把下列矩阵化为最简形矩阵，并求矩阵的秩

（4）

</td>
</tr>
</table>

	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 3. 利用矩阵的初等行变换，求下列方阵的逆矩阵 （2）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，　（3）$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4. 求下列矩阵的秩，并求一个最高阶非零子式 （1）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$，（3）$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 8. 非齐次线性方程组 $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$ 当 λ 取何值时，并求出它的通解。 9. 证明方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$ 有解的充要条件是 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$， 并在有解的情况，求出它的全部解。 （B） 1. **已知矩阵** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -10 \\ 2 & 5 & k & 1 \\ 1 & 2 & -1 & k \end{pmatrix}$ **的秩为 2，则** $k =$ 17. **试讨论线性方程组** $\begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ x_2 - x_3 = b \\ -x_1 + tx_2 = c \end{cases}$ **有解的条件。**
教　学 后　记	在本节的教学过程中，学生大多表现出较高的学习积极性和情感投入，通过交流互动学生已大致掌握本节的内容，希望学生课后多做习题来巩固所学知识，加深理解与掌握.

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">向量及向量空间　内　容　n维向量及其线性相关性、向量组的秩</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">§4.1 n维向量及其线性相关性
§4.2 向量组的秩</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>§4.1 n维向量及其线性相关性　§4.2 向量组的秩</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　日　第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标:理解n维向量、线性相关、线性无关的定义，掌握向量组线性相关性的判定及重要结论。理解向量组的最大线性无关组、向量组的秩、向量组的等价的定义。
能力目标:掌握向量组线性相关性的判定,培养学生的逻辑推理能力、抽象思维能力。
思政目标:
1.培养学生善于用联系的观点看问题，勇于探索的科学精神。在定理的证明过程中，让学生明白数学学科的严谨性，培养学生严谨求实的工作作风。
2.通过本节课的学习，让学生更好地体会家与国的关系，增强学生的爱国主义情感，激发学生的爱国热情，培养学生科技报国的家国情怀和使命担当。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：线性相关和线性无关的定义，向量组的最大线性无关组、向量组的秩。
难点：向量组线性相关性的判定及重要结论，向量组的最大线性无关组、向量组的秩。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">教师课前充分备课，了解学情；学生需要具备初等数学知识和计算技能。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、启发式教学、案例教学等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线上线下混合式教学</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">习题4(A) 1,2,3,4,5,6,7</td></tr>
</table>

参　考 资　料	1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006 2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009 3.同济大学数学系．工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社．2014

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>

§4.1 $\boldsymbol{n}$ 维向量及其线性相关性

导入：

惠崇春江晚景

竹外桃花三两枝,春江水暖鸭先知。

蒌蒿满地芦芽短,正是河豚欲上时。

联系具有普遍性世界观:

①联系具有普遍性。

②联系是事物之间以及事物内部诸要素之间的相互依赖、相互影响、相互制约和相互作用。

③世界上的一切事物都与周围其他事物有着这样或那样的联系;每一事物内部的各个部分...

2.联系具有客观性世界观:

①联系具有客观性。

②联系是事物本身所固有的,不以人的意志为转移。

③事物的联系就其与实践的关系来说...

3.联系具有多样性世界观: 世界上的事物千差万别,事物的联系也是多种多样的。

（思政目标：联系的观点，即联系观，是唯物辩证法的一个总特征。课堂上引导学生善于用联系的观点看问题。）

新知讲解：

定义 1 n 个有次序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的数组称为 n 维向量，这 n 个数称为该向量的 n 个分量，第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量。

n 维向量可写成一行或一列。写成一行的称为行向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，写成一列的称为列向量 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$，也分别称为行矩阵和列矩阵，并规定都按矩阵的运算规则进行运算。所以 n 维列向量可表示为 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$。

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>

定义 2 设 $\alpha_i \in R^n, k_i \in R, (i=1,2,\cdots,m)$，则向量 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$ 称为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 在实数域 R 上的一个线性组合，$k_1,k_2\cdots k_m$ 称为该线性组合的系数。

若记 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$，则称 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示。

向量 β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，也即方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ 有解。

定义 3 若对 m 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，有 m 个不全为零的实数 $k_1,k_2\cdots k_m$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 成立，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关；否则，称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，即没有不全为零的实数 $k_1,k_2\cdots k_m$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 成立，也就是，只有当 $k_1,k_2\cdots k_m$ 全为零时，才使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 成立。

（思政目标：通过学习向量组线性相关、线性无关的定义，培养学生善于用联系的观点看问题，勇于探索的科学精神。）

定理 1 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m (m\geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示。

证 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则存在 m 个不全为 0 的数 $k_1,k_2\cdots k_m$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

不妨设 $k_1\neq 0$，于是由向量的线性运算规则得

$$\alpha_1=-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2-\frac{k_3}{k_1}\alpha_3\cdots-\frac{k_m}{k_1}\alpha_m$$

必要性得证。再证充分性，不妨设 α_1 可用 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_m$ 线性表示即

</td>
</tr>
</table>

教学流程	$$\alpha_1 = l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 \cdots + l_m\alpha_m$$ 于是有 $$1\alpha_1 - l_2\alpha_2 - l_3\alpha_3 \cdots - l_m\alpha_m = 0$$ 显然$1, -l_2, -l_3, \cdots, -l_m$不全为 0，故$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关。 **（思政目标：在定理证明过程中，让学生深刻体会数学的科学性和严谨性，帮助学生形成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风。）** **知识点巩固：** **例 1** 设n维向量$\varepsilon_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^T$，即第$i$个分量为 1，其余分量为 0，则$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$是线性无关的。 **证** 设存在$n$个数$k_1, k_2 \cdots k_n$使 $$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$ 即 $$(k_1, k_2 \cdots k_n)^T = 0$$ 则必须$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$，故$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$线性无关。 以后，我们把$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$称为基本向量。因为$R^n$中任一个向量$\alpha = (a_1, a_2, \cdots a_n)^T$都可由$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$线性表示，即 $$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots a_n\varepsilon_n$$ **例 2** 如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$中有一部分向量线性相关，则这个向量组也线性相关。 **证** 不妨设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_j (j < m)$线性相关，于是有不全为零的数$k_1, k_2 \cdots k_j$使 $$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_j\alpha_j = 0$$ 从而有不全为零的数$k_1, k_2 \cdots k_j, 0, \cdots, 0$使

教学流程	$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_j\alpha_j+0\alpha_{j+1}+\cdots+0\alpha_m=0$$ 故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$也线性相关。 **定理 2** 设$n$维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，其中 $$\alpha_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1})^T,\alpha_2=(a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2})^T,\cdots,\alpha_r=(a_{1r},a_{2r},\cdots,a_{nr})^T$$ 则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组 $$\boldsymbol{A}x=0 \tag{4.1}$$ 有非零解，其中$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$， $x=(x_1,x_2,\cdots,x_r)^T$。 **证** 设 $$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=0 \tag{4.2}$$ 即 $$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}+\cdots+x_r\begin{pmatrix}a_{1r}\\a_{2r}\\\vdots\\a_{nr}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \tag{4.3}$$ 将（4.3）式左端作线性运算，再与其右端相等，即得线性方程组（4.1）。因此，如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，就必有不全为零的数$x_1,x_2,\cdots,x_r$使得（4.2）式成立，即齐次线性方程组（4.1）有非零解；反之，如果线性方程组（4.1）有非零解，也就是有不全为零的数$x_1,x_2,\cdots,x_r$使（4.2）成立，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关。 **定理 3** 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，而$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，且表示法唯一。 **证** 因为$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，所以存在不全为零的数$k,k_1,k_2,\cdots,k_r$，使得 $$k\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$ 其中$k\neq0$（如果$k=0$，则由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关又得$k_1,k_2,\cdots,k_r$必须全为零，这与$k,k_1,k_2,\cdots,k_r$不全为零矛盾），于是$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示为

教学流程	$$\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-\cdots-\frac{k_r}{k}\alpha_r$$ 再证表示法唯一，设有两种表示方法： $$\begin{aligned}\beta&=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_r\alpha_r\\&=h_1\alpha_1+h_2\alpha_2+\cdots+h_r\alpha_r\end{aligned}$$ 于是 $$(l_1-h_1)\alpha_1+(l_2-h_2)\alpha_2+\cdots+(l_r-h_r)\alpha_r=0$$ 由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，所以必有 $$l_i-h_i=0，即 l_i=h_i,i=1,\cdots,r$$ 故β由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示的表示法唯一。 **（思政目标：在定理证明过程中，让学生深刻体会数学的科学性和严谨性，帮助学生形成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风。）** **推论** 如果R^n中的n个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，则$R^n$中的任一向量$\alpha$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，且表示法唯一。 **知识点巩固：** **例 3** 设$\alpha_1=(1,-1,1),\alpha_2=(1,2,0),\alpha_3=(1,0,3),\alpha_4=(2,-3,7)$. 问：（1）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关？（2）$\alpha_4$是否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？如能表示求其表示式。 **解** （1）根据定理 2，作矩阵 $$\boldsymbol{A}=(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$$ 由$\lvert\boldsymbol{A}\rvert=7$，得$\boldsymbol{A}$可逆，从而得方程组$\boldsymbol{A}x=0$只有零解，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。 （2）根据推论，$\alpha_4$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示法唯一，设

教学流程	$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_4$$ 即 $$x_1(1,-1,1)+x_2(1,2,0)+x_3(1,0,3)=(2,-3,7)$$ 于是得 $$(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$$ 即 $\boldsymbol{A}x=\alpha_4^{\mathrm{T}}$，解此方程组得唯一解：$x_1=1,x_2=-1,x_3=2$，故 $$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$$ **例 4** 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，又 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1-\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$，证明 β_1,β_2,β_3 线性相关。 **证** 思路是，由 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$ 推出 x_1,x_2,x_3 不全为零。 设 $$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0 \qquad ①$$ 即 $$x_1(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)+x_2(\alpha_1-\alpha_2)+x_3(\alpha_1+\alpha_3)=0$$ $$(x_1+x_2+x_3)\alpha_1+(x_1-x_2)\alpha_2+(2x_1+x_3)\alpha_3=0$$ 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，上式系数必须全为零，于是得 $$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1-x_2=0\\2x_1+x_3=0\end{cases}$$ 容易解得此方程组有非零解 $(-1,-1,2)$。因此，有不全为零的 x_1,x_2,x_3 使①成立，故 β_1,β_2,β_3 线性相关。 **§4.2 向量组的秩**

导入：

国 家

成龙

一玉口中国　一瓦顶成家
都说国很大　其实一个家
一心装满国　一手撑起家
家是最小国　国是千万家
在世界的国　在天地的家
有了强的国　才有富的家
国的家住在心里　家的国以和矗立
国是荣誉的屹立　家是幸福的洋溢
国的每一寸土地　家的每一个足迹
国与家连在一起　创造地球的奇迹
国是我的国　家是我的家
我爱我的国　我爱我的家
国是我的国　家是我的家
我爱我的国　我爱我的家
我爱我　国家

（思政目标：通过回顾成龙演唱的《国家》这首歌的歌词，引入国与家的关系，最大无关组（家）是向量组（国）的一部分，向量组的任意一个向量能由最大无关组线性表示，让学生更好地体会家与国的关系，激发学生的爱国热情，培养学生科技报国的家国情怀和使命担当。各行各业的劳动者不忘初心，牢记使命，共同建设我们美丽的家园，为实现中华民族伟大复兴的中国梦而拼搏奋斗。）

新知讲解：

定义 1 设向量组 A 中的一个部分组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，满足

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

（2）向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（如果有）都线性相关。

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 A 的一个最大线性无关向量组（简称最大无关组）；最大无关组所含向量个数 r 称为向量组 A 的秩，记作 $R(A)$。

定义 2 若向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中每一个向量可由向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，则称向量组 A 可由向量组 B 线性表示，若两个向

	量组可以互相线性表示，则称这两个向量组是等价的。 **定理 1** 若向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，且 $t>s$，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性相关。 **证** 设 $\beta_j=\sum_{i=1}^{s}k_{ij}\alpha_i\,(j=1,\cdots,t)$，欲证 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性相关，只需证：存在不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_t$，使得 $$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_t\beta_t=0 \qquad (4.4)$$ 即 $$\sum_{j=1}^{t}x_j\beta_j=\sum_{j=1}^{t}x_j(\sum_{i=1}^{s}k_{ij}\alpha_i)=\sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=1}^{t}k_{ij}x_j)\alpha_i=0$$ 当其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的系数 $$\sum_{j=1}^{t}k_{ij}x_j=0,(i=1,2,\cdots,s) \qquad (4.5)$$ 时，（4.4）式显然成立。而（4.5）式是 t 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_t$ 的齐次线性方程组，由于 $t>s$（方程个数），故线性方程组（4.5）有非零解，即有不全为零的 $x_1,x_2,\cdots,x_t$ 使（4.4）式成立。所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性相关。 **（思政目标：在定理证明过程中，让学生深刻体会数学的科学性和严谨性，帮助学生形成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风。）** **推论 1** 如果向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，且 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性无关，则 $t\le s$。 **推论 2** 若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任何 $r+1$ 个向量都是线性相关的。 **证** 不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中的 r 个线性无关的向量，由于该向量组中任一个向量可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，所以由定理 1 立即可得其中任何 $r+1$ 个向量都线性相关。

推论 3 设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的秩为p，向量组$\beta_1,\cdots,\beta_t$的秩为r，如果向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，则$r\le p$。

证 不妨设$\alpha_1,\cdots,\alpha_p$和$\beta_1,\cdots,\beta_p$分别是两个向量组的极大线性无关组，因此有

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{p}c_{ij}\alpha_j,(i=1,\cdots,s)$$

又已知

$$\beta_k=\sum_{i=1}^{s}b_{ki}\alpha_i,(k=1,\cdots,r,\cdots,t)$$

所以

$$\beta_k=\sum_{i=1}^{s}b_{ki}(\sum_{j=1}^{p}c_{ij}\alpha_j)=\sum_{j=1}^{p}(\sum_{i=1}^{s}b_{ki}c_{ij})\alpha_j$$

即$\beta_1,\cdots,\beta_r$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_p$线性表示，于是由推论 1 可得$r\le p$。

（思政目标：在定理证明过程中，让学生深刻体会数学的科学性和严谨性，帮助学生形成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风。）

定理 2 向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$能由向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示的充分必要条件是矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$的秩等于矩阵$(A,B)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$的秩。（证明略）

推论 4 向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$等价地充分必要条件是$R(A)=R(B)=R(A,B)$。

知识点巩固：

例 1 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$，证明向量$b$能由向量

组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，并求出表示式。

解 根据定理 2，要证矩阵$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$与$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},b)$的秩相等。为此，把$\boldsymbol{B}$化成行最简形：

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&-1&2&1\\0&1&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，因此，向量$b$能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示。

由上述行最简形，可得方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=b$的通解为

$$x=c\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3c+2\\2c-1\\c\end{pmatrix}$$

从而得表示式

$$b=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=(-3c+2)\alpha_1+(2c-1)\alpha_2+c\alpha_3$$

其中c可任意取值。

例 2 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$，证明向量组 α_1,α_2与向量组β_1,β_2,β_3等价。

证 记$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2),\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$。根据定理 2 的推论，只要证$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$。为此把$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$化成行阶梯形：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\-1&1&0&1&-1\\1&1&1&0&2\\-1&3&1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&4&2&2&2\\0&-2&-1&-1&-1\\0&6&3&3&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+\frac{1}{2}r_2\\r_4-\frac{3}{2}r_2}]{\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&2&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

	可见，$R(\boldsymbol{A})=2, R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2$ 。 容易看出矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中有不等于 0 的 2 阶子式，故 $R(\boldsymbol{B})\geq 2$ 。又 $$R(\boldsymbol{B})\leq R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2$$ 于是知 $R(\boldsymbol{B})=2$ 。因此， $$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$$ **定理 3** 矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩。 **证** 设 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m), R(\boldsymbol{A})=r$ ，并设 r 阶子式 $D_r\neq 0$ 。根据第四章第一节定理 2 的等价命题，由 $D_r\neq 0$ 知 D_r 所在的 r 列线性无关；又由 $\boldsymbol{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式均为零，知 $\boldsymbol{A}$ 中任意 $r+1$ 个列向量都线性相关。因此 D_r 所在的 r 列是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大无关组，所以列向量组的秩等于 r 。 **课堂评测：** 习题 4(A)　2(1)，3(1)，8(1) **内容小结：** n 维向量的概念 向量线性相关、线性无关的概念 向量线性相关的相关结论 向量组的最大线性无关组、向量组的秩
教　学 后　记	

章节（单元）教案

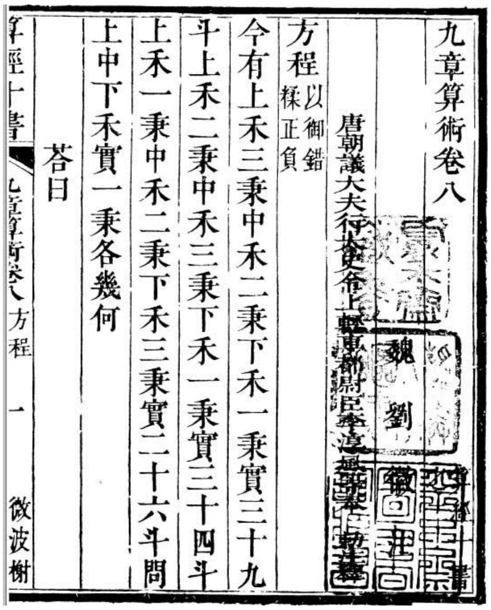
<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="2">向量及向量空间</td><td>内　容</td><td colspan="2">线性方程组解的结构</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="3">§4.3 线性方程组解的结构</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>§4.3 线性方程组解的结构</td><td>时间</td><td colspan="3">年　月　日　第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">知识目标:理解齐次线性方程组解的性质、基础解系的定义，掌握非齐次线性方程组解的结构。
能力目标:掌握齐次及非齐次线性方程组的通解的求法。
思政目标:
1. 培养学生的爱国主义情怀,始终坚持中国特色社会主义道路自信、理论自信、制度自信、文化自信;
2. 在定理证明过程中，深刻体会数学的科学性和严谨性，帮助学生形成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="5">重点：齐次线性方程组的基础解系和通解、非齐次线性方程组解的结构和通解。
难点：齐次线性方程组的基础解系和通解、非齐次线性方程组解的结构和通解。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="5">教师课前充分备课，了解学情；学生需要具备初等数学知识和计算技能。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="5">课堂讲授、启发式教学、案例教学等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="5">线上线下混合式教学</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="5">习题 4(A) 9,10,11</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="5">1. 吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006
2. 吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009
3. 同济大学数学系. 工程数学：线性代数（第六版）. 北京：高等教育出版社. 2014</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>

导入：

线性方程组的研究起源于古代中国，在中国数学经典著作《九章算术》一书中就有了线性方程组的介绍和研究，有关解方程组的理论已经很完整。 方程一词出现在中国早期的数学专著《九章算术》中，其「卷第八」即名「方程」。



九章算術卷八

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉敕注釋

魏 劉徽 注

方程 以御錯糅正負

今有上禾三秉中禾二秉下禾一秉實三十九斗上禾二秉中禾三秉下禾一秉實三十四斗上禾一秉中禾二秉下禾三秉實二十六斗問上中下禾實一秉各幾何

答曰

算經十書 九章算術卷八 方程 一 微波榭

第八（一）为：

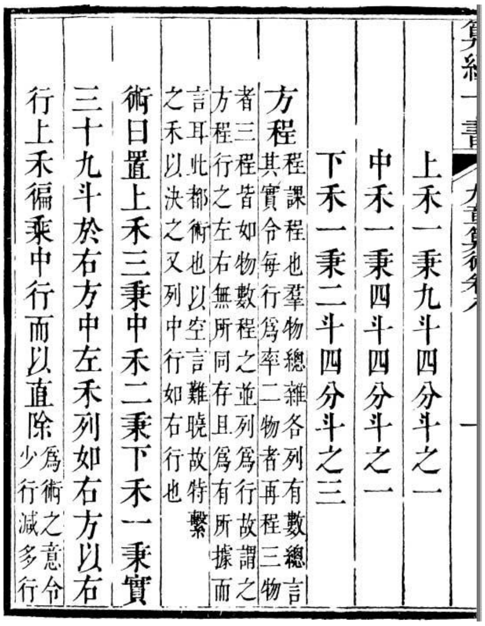
今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？

答曰：

上禾一秉，九斗、四分斗之一，

中禾一秉，四斗、四分斗之一，

下禾一秉，二斗、四分斗之三。



上禾一秉九斗四分斗之一

中禾一秉四斗四分斗之一

下禾一秉二斗四分斗之三

方程 程課程也羣物總雜各列有數總言其實令每行爲率二物者再程三物者三程皆如物數程之並列爲行故謂之方程行之左右無所同存且爲有所據而言耳此都術也以空言難曉故特繫之禾以決之又列中行如右行也

術曰置上禾三秉中禾二秉下禾一秉實三十九斗於右方中左禾列如右方以右行上禾徧乘中行而以直除 爲術之意令少行減多行

其实这仅仅是三元一次方程的简单应用：

设：上禾一秉 x 斗，

中禾一秉 y 斗

下禾一秉 z 斗

由题意得：

$3x+2y+z=39$
$2x+3y+z=34$
$x+2y+3z=26$

</td>
</tr>
</table>

教学流程	**（思政目标：通过介绍线性方程组的起源，培养学生的爱国主义情怀，要始终坚持中国特色社会主义道路自信、理论自信、制度自信、文化自信）** **新知讲解：** 对于齐次线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$ 记 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 则（4.6）式可写为向量方程 $\boldsymbol{A}x = 0$。 n 个未知量的齐次方程组 $\boldsymbol{A}x = 0$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A) < n$，其等价命题是：齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}x = 0$ 只有零解的充分必要条件是 $R(A) = n$。 **（提问学生，教师加以引导）** **（思政目标：齐次线性方程组是非齐次线性方程组的一种特殊情形，马克思唯物主义辩证法指出，一般与特殊、共性与个性是对立统一的矛盾关系，二者相互依存、相互转化。）** **定理 1** 若 α_1, α_2 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}x = 0$ 的两个解，则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$（$k_1, k_2$ 为任意常数）也是它的解。 **证** 因为 $\boldsymbol{A}(k_1x_1 + k_2x_2) = k_1\boldsymbol{A}x_1 + k_2\boldsymbol{A}x_2 = k_1 0 + k_2 0 = 0$，故 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 是 $\boldsymbol{A}x = 0$ 的解。 **定义 1** 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 是 $\boldsymbol{A}x = 0$ 的解向量，如果：（1）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 线

教学流程	性无关；（2） $\boldsymbol{A}x=0$ 的任一个解向量可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 线性表示。则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 是 $\boldsymbol{A}x=0$ 的一个基础解系。 如果找到了 $\boldsymbol{A}x=0$ 的基础解系 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$，那么 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_p\alpha_p$ 对任意常数 $k_1,k_2,\cdots,k_p$ 作成的集合，就是 $\boldsymbol{A}x=0$ 的全部解的集合。 **定理 2** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，若 $R(A)=r<n$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}x=0$ 存在基础解系，且基础解系含 $n-r$ 个解向量。 **证** 先证存在 $n-r$ 个线性无关的解向量。按高斯消元法步骤对 A 做初等行变换，将 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形阵 U，不失一般性，可设 $$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ 于是 $\boldsymbol{U}x=0$，即 $$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad +c_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n=0 \\ \quad x_2 \quad\quad +c_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{2n}x_n=0 \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \quad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad\quad x_r \ +c_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n=0 \end{cases} \tag{4.7}$$ 是 $\boldsymbol{A}x=0$ 的同解方程组，取 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 为自由未知量，将它们的下列 $n-r$ 组值： $$(1,0,\cdots,0);(0,1,\cdots,0);\cdots;(0,0,\cdots,1)$$ 分别代入（4.7），相应地求得 $x_1,x_2,\cdots,x_r$，并得到 $n-r$ 个解： $$\begin{aligned} &\xi_1=(d_{11},d_{21},\cdots,d_{r1},1,0,\cdots,0)^T \\ &\xi_2=(d_{12},d_{22},\cdots,d_{r2},0,1,\cdots,0)^T \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\xi_{n-r}=(d_{1,n-r},d_{2,n-r},\cdots,d_{r,n-r},0,0,\cdots,1)^T \end{aligned}$$

教学流程	显然，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是线性无关的（因为由 $\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\cdots+\lambda_{n-r}\xi_{n-r}=0$ 可推出 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0$）。 再证 $\boldsymbol{A}x=0$ 的任一个解 x 可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示。为此任取自由未知量的一组值 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 代入（4.7），得一个解 $$x=(d_1,d_2,\cdots,d_r,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r})^T,$$ 由于 $$x^*=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$ 也是一个解，所以 $$x-x^*=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_r\\k_1\\k_2\\\vdots\\k_{n-r}\end{pmatrix}-k_1\begin{pmatrix}d_{11}\\d_{21}\\\vdots\\d_{r1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}-k_2\begin{pmatrix}d_{12}\\d_{22}\\\vdots\\d_{r2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}-\cdots-k_{n-r}\begin{pmatrix}d_{1n-r}\\d_{2n-r}\\\vdots\\d_{rn-r}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1'\\d_2'\\\vdots\\d_r'\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$ 是相应于自由未知量 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 全取零时的 $\boldsymbol{A}x=0$ 的一个解，这个解是 $\boldsymbol{A}x=0$ 的零解，故 $$x-x^*=0$$ 即 $$x=x^*=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}.$$ 因此，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{A}x=0$ 的一个含有 $n-r$ 个解向量的基础解系。 **（思政目标：在定理证明过程中，让学生深刻体会数学的科学性和严谨性，帮助学生形成良好的学习习惯、思维严谨、工作求实的作风。）** **知识点巩固：** **例 1** 解齐次线性方程组

教学流程

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

且将其通解用基础解系表示。

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & -7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

通解为

$$\begin{cases} x_1 = -c_1 + 6c_2 \\ x_2 = c_1 - 2.5c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = 3c_2 \\ x_5 = c_2 \end{cases}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。

写成向量形式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -2.5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数。

故一个基础解系为 $\xi_1 = (-1,1,1,0,0)^T, \xi_2 = (6,-2.5,0,3,1)^T$，通解为 $\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$，其中 c_1, c_2 为任意常数。

接下来讨论非齐次线性方程组解的结构，设有非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.8}$$

它的向量形式为 $\boldsymbol{A}x = b$。

定理 3 若 ξ_1, ξ_2 是 $\boldsymbol{A}x = b$ 的解，则 $\xi_1 - \xi_2$ 是对应齐次方程组 $\boldsymbol{A}x = 0$ 的

教学流程	解。

证 $\boldsymbol{A}(\xi_1-\xi_2)=\boldsymbol{A}\xi_1-\boldsymbol{A}\xi_2=b-b=0$，即 $\xi_1-\xi_2$ 是 $\boldsymbol{A}x=0$ 的解。

定理 4 若 η 是 $\boldsymbol{A}x=b$ 的解，ξ 是 $\boldsymbol{A}x=0$ 的解，则 $x=\xi+\eta$ 是 $\boldsymbol{A}x=b$ 的解。

证 $\boldsymbol{A}(\xi+\eta)=\boldsymbol{A}\xi+\boldsymbol{A}\eta=0+b=b$，即 $x=\xi+\eta$ 是 $\boldsymbol{A}x=b$ 的解。

由定理 3 可知，若求得 $\boldsymbol{A}x=b$ 的解 η^*，则 $\boldsymbol{A}x=0$ 的任一解总可表示为

$$x=\xi+\eta^*,$$

其中 $x=\xi$ 为方程 $\boldsymbol{A}x=0$ 的解，又若方程 $\boldsymbol{A}x=0$ 的通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}.$，则方程 $Ax=b$ 的任一解总可表示为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*$$

而由定理 4 可知，对任何实数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$，上式总是方程 $\boldsymbol{A}x=b$ 的解。于是方程 $\boldsymbol{A}x=b$ 的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^* \text{（}k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\text{ 为任意实数）}$$

其中 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{A}x=0$ 的基础解系。

知识点巩固：

例 2 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=1 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

提问学生：1. 该线性方程组是齐次的还是非齐次的？
2. 其通解的结构是什么？

解 对增广矩阵施行初等行变换

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

教学流程

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$，所以方程组有解，并有

$$\begin{cases}x_1=x_2+x_4+\dfrac{1}{2}\\ x_3=2x_4+\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

取 $x_2=x_4=0$，则 $x_1=x_3=\dfrac{1}{2}$，即得方程组的一个解

$$\eta^*=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\ 0\\ \dfrac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix},$$

在对应的齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1=x_2+x_4\\ x_3=2x_4\end{cases}$ 中，取

$$\begin{pmatrix}x_2\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\ \text{则}\begin{pmatrix}x_1\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix},$$

即得对应的齐次线性方程组的基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\\ 1\end{pmatrix},$$

于是所求通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/2\\ 0\\ 1/2\\ 0\end{pmatrix}\quad (c_1,c_2\in R).$$

课堂评测：

习题 4(A)：9（1）,10（1）

内容小结：

教学流程	齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}x=0$ 的通解为 $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_p\alpha_p$（$k_1,k_2,\cdots,k_p$ 为任意常数） 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 为是 $\boldsymbol{A}x=0$ 的基础解系。 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}x=b$ 的通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*$（$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意实数） 其中 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{A}x=0$ 的基础解系，η^* 是 $\boldsymbol{A}x=b$ 的解。
教　学 后　记	

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="2">向量及向量空间</td><td>内　容</td><td>向量空间、习题课</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">§4.4 向量空间
第 4 章习题课</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>§4.4 向量空间
第 4 章习题课</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　日　第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标:理解向量空间、基、坐标等基本概念。
能力目标:掌握基变换与坐标变换，会求过渡矩阵。
思政目标:通过展示中国航天科技的巨大进展,激发学生的民族自豪感，以及追求科学的探索精神。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：向量空间、基的概念。
难点：向量空间的基、基变换与坐标变换。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">教师课前充分备课，了解学情；学生需要具备初等数学知识和计算技能。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、启发式教学、案例教学等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线上线下混合式教学</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">习题 4(A) 28,29,30,31</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006
2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009
3.同济大学数学系．工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社．2014</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>
导入：

2020 年 12 月 17 日凌晨，携带月球土壤样品的中国嫦娥五号返回器成功返回地球。这是人类时隔 44 年再次获得月球样本，见证了中国航天创造的新历史。作为我国复杂度最高、技术跨度最大的航天系统工程，嫦娥五号任务成功实现了我国首次月面采样与封装、月面起飞、月球轨道交会对接、携带样品载入返回等多项技术重大突破，标志着我国探月工程“绕、落、回”三步走规划如期完成，至此中国探月工程六战六捷，其中控制系统的输入和输出信号就依赖于函数的向量空间，我们这节课来学习向量空间。

（思政目标：通过展示中国航天科技的巨大进展，激发学生的民族自豪感，以及追求科学的探索精神。）

新知讲解：

定义 1 设 V 为 n 维向量的集合，若集合 V 非空，且集合 V 对于向量的加法及乘数两种运算封闭，则称集合 V 为向量空间。封闭是指，在集合 V 中可以进行加法及乘数运算，即：若 $a\in V$ ， $b\in V$ ，则 $a+b\in V$ ；若 $a\in V$ ， $\lambda\in R$ ，则 $\lambda a\in V$ 。

一般的，由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 所生成的向量空间为

$$L=\{x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m \,|\, \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in R\}$$

定义 2 设 V 为向量空间，如果 r 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V$ ，且满足

（1） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

（2） V 中任一向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，

那么，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 就称为向量空间 V 的一个基，r 称为向量空间 V 的维数，并称 V 为 r 维向量空间。

如果向量空间 V 没有基，那么 V 的维数为 0。0 维向量空间只含一个零向量 0.

定义 3 如果在向量空间 V 中取定一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ ，那么 V 中任一向
</td>
</tr>
</table>

教学流程	量α可唯一地表示为 $$\alpha=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r$$ 数组$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$称为向量$\alpha$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$中的坐标。 特别地，在$n$维向量空间$R^n$中取单位坐标向量组$e_1,e_2,\cdots,e_n$为基，则以$a_1,a_2,\cdots,a_n$为分量的向量$\alpha$，可表示为 $$\alpha=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$$ 可见向量在基$e_1,e_2,\cdots,e_n$中的坐标就是该向量的分量。因此，$e_1,e_2,\cdots,e_n$叫做R^n中的自然基。 **定义 4** 设V为向量空间，向量组$B_1:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$B_2:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$都是$V$的基，且 $$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1r}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2r}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{r1}&a_{r2}&\cdots&a_{rr}\end{pmatrix}$$ 则称矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1r}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2r}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{r1}&a_{r2}&\cdots&a_{rr}\end{pmatrix}$为基$B_1$到$B_2$的过渡矩阵。 **定理 1** 设向量$\alpha$在两组基$B_1:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$B_2:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$下的坐标分别为$x=(x_1,x_2,\cdots,x_r)^T$和$y=(y_1,y_2,\cdots,y_r)^T$，基$B_1$到$B_2$的过渡矩阵为$\boldsymbol{A}$，则$\boldsymbol{A}y=x$或$y=\boldsymbol{A}^{-1}x$。 **证** 由已知条件有$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\boldsymbol{A}$成立，且 $$\begin{aligned}\alpha&=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r\\&=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_r\beta_r\end{aligned}$$ 所以 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_r\end{pmatrix},$

教学流程	$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_r\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)[\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_r\end{pmatrix}]$$ 由于α在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$下的坐标是唯一的，所以$\boldsymbol{A}y=x$或$y=\boldsymbol{A}^{-1}x$。 **（思政目标：讲解基底变换与坐标变换时，*n* 维向量空间的子空间中，每一个向量都可以表示成基底的唯一组合，向量坐标的确定依赖于基底的选择，激励学生需要根据自己的兴趣爱好，找准自己的人生坐标，确定坐标与目标后，无论遇到什么挫折，都一如既往的勇敢坚持走下去。）** **知识点巩固：** **例 1** 已知R^3的一组基$B_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$为$\beta_1=(1,2,1)^T,\beta_2=(1,-1,0)^T,\beta_3=(1,0,-1)^T$，求自然基$B_1=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$到$B_2$的过渡矩阵$\boldsymbol{A}$。 **解** 由$\begin{cases}\beta_1=\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3\\\beta_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2\\\beta_3=\varepsilon_1-\varepsilon_3\end{cases}$ 即 $$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$ 得 $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}。$$ **例 2** 已知R^3的两组基$B_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$及$B_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中 $$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T,$$ $$\beta_1=(1,0,1)^T,\beta_2=(0,1,-1)^T,\beta_3=(1,2,0)^T.$$

教学流程	（1）求基 B_1 到基 B_2 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$；（2）已知 α 在基 B_1 下的坐标为 $(1,-2,-1)^T$，求 α 在基 B_2 下的坐标。 **解**（1）设 $$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$ 将以列向量形式表示的两组基向量代入上式，得 $$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$ 故过渡矩阵 $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$$ $$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}$$ （2）根据定理 1，得 α 在基 B_2 下的坐标 $$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\-1&-3&-2\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\-4\end{pmatrix}$$ 此题的另一解法：先求出 α，即 $$\alpha=\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3=(1,-1,-2)^T$$ 然后按 $\alpha=y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3$，解出坐标 $(y_1,y_2,y_3)^T$。 **课堂评测：** 习题 4(A) 31 **内容小结：** 向量空间、基、坐标、过渡矩阵、基变换与坐标变换

教学流程	**第 4 章习题课** **一、本章内容小结** 1.n 维向量 2.n 维向量的线性相关性 3.向量组的秩及其最大线性无关组 4.齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构 5.非齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构 6.R^n 的基与向量的坐标 7.过渡矩阵，基变换与坐标变换 **二、习题讲解** **习题四 （A）** 1. 将向量 β 表示成其它向量的线性组合: （1） $\beta=(3,5,-6)^T,\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,1,1)^T,\alpha_3=(0,-1,-1)^T.$ （2） $\beta=(2,-1,5,1)^T,\varepsilon_1=(1,0,0,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,0,0)^T,\varepsilon_3=(0,0,1,0)^T,\varepsilon_4=(0,0,0,1)^T.$ 2. 判别下列向量组的线性相关性: （1） $\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(-2,2,0)^T,\alpha_3=(3,-5,2)^T.$ （2） $\alpha_1=(1,1,3,1)^T,\alpha_2=(3,-1,2,4)^T,\alpha_3=(2,2,7,-1)^T.$ 3. 设 $\alpha_1=(6,a+1,3)^T,\alpha_2=(a,2,-2)^T,\alpha_3=(a,1,0)^T,\alpha_4=(0,1,a)^T.$ 试问: （1） a 为何值时，α_1,α_2 线性相关？线性无关？ （2） a 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关？线性无关？ （3） a 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关？线性无关？ 4. 证明：若 α_1,α_2 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2$ 也线性无关. 8. 求下列向量组的秩和一个最大无关组，并将其余向量用此最大无关组线性表示.

教学流程	（1） $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,0,0)^T,\alpha_4=(1,2,-3)^T$. （2） $\alpha_1=(1,1,3,1)^T,\alpha_2=(-1,1,-1,3)^T,\alpha_3=(5,-2,8,-9)^T,\alpha_4=(-1,3,1,7)^T$. 9. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解： （1） $\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0\\2x_1+x_2-2x_3+x_4=0\\3x_1-x_2+2x_3-4x_4=0\end{cases}$； （2） $\begin{cases}x_1-2x_2-x_3-x_4+x_5=0\\2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0\\3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0\\2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0\end{cases}$； （3） $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0\\2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0\\x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0\\3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0\end{cases}$. 10．求下列非齐次线性方程组的通解： （1） $\begin{cases}2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6\\3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4\\9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2\end{cases}$； （2） $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12\end{cases}$； （3） $\begin{cases}2x+3y+z=4\\x-2y+4z=-5\\3x+8y-2z=13\\4x-y+9z=-6\end{cases}$. 11．设线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$， 讨论 λ 取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？并在方程组有无穷多解时，求其通解. 30．验证 $\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(2,1,3)^T,\alpha_3=(3,1,2)^T$ 为 R^3 的一个基，并

教学流程	把 $v_1=(5,0,7)^T, v_2=(-9,-8,-13)^T$ 用这个基线性表示. 31．已知 R^3 的两个基为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 及 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$ 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 P.
教　学 后　记	

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要 素</td><td colspan="4">相似矩阵 内 容 向量内积和正交矩阵</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">§5.1 向量内积和正交矩阵</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>1.向量的内积
2.正交向量组
3.正交矩阵及其性质</td><td>时间</td><td colspan="2">年 月 日 第 节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：理解向量的内积,正交向量组，理解正交矩阵及其性质.
能力目标：掌握向量的内积、正交矩阵及施密特正交化方法。
素质目标（价值观目标）:通过本节课学习，提升学生学习数学的兴趣及应用数学的意识。
思政目标：培养学生严谨科学的态度，让学生体会科学的方法论中严谨，实事求是的重要性，从而达到培养科学思维方式的目的。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：向量的内积，正交向量组，正交矩阵及其性质
难点：正交矩阵及其性质</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">教师课前充分备课，了解学情；学生需要具备初等数学知识和计算技能。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、启发式教学、案例教学等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线上线下混合式教学</td></tr>
<tr><td>练 习
作 业</td><td colspan="4">作业：习题五 1 2 3
思考：(B) 2</td></tr>
<tr><td>参 考
资 料</td><td colspan="4">1.吴赣昌．线性代数．北京：中国人民大学出版社.2006
2.吴传生．经济数学线性代数（第二版）．北京：高等教育出版社.2009
3.同济大学数学系．工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社．2014</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

教学流程	§5.1 向量内积和正交矩阵 **导入** 通过对向量空间知识的学习，注意到了它与几何向量在某些特征上是一致的，特别是线性运算，但我们并没有涉及更多的几何度量性质，比如向量的大小，距离，夹角等，而这些性质在解析几何中是通过内积反映出来的，本节我们将学习引入内积的实数域（复数域）上的向量空间，即欧氏空间（酉空间），这也是几何与代数的又一次结合。 思政元素（欧几里德简介）：约在公元前 300 年，古希腊数学家欧几里得建立了角和空间中距离之间联系的法则，现称为欧几里得几何。欧几里得首先开发了处理平面上二维物体的"平面几何"，他接着分析三维物体的"立体几何"，所有欧几里得的公理已被编排到叫做二维或三维欧几里得空间的抽象数学空间中。而这些数学空间可以被扩展来应用于任何有限维度，而这种空间叫做 n 维欧几里得空间(甚至简称 n 维空间)或有限维实内积空间。这些数学空间还可被扩展到任意维的情形。 亚历山大里亚的欧几里德(希腊文:Ε υ κ λ ε ι δ η ς ，约公元前 330 年-前 275 年)，古希腊数学家，被称为"几何之父"。他活跃于托勒密一世(公元前 323 年-前 283 年)时期的亚历山大里亚，他最著名的著作《几何原本》是欧洲数学的基础，提出五大公设，发展欧几里德几何，被广泛的认为是历史上最成功的教科书。 欧几里得也写了一些关于透视、圆锥曲线、球面几何学及数论的作品。 欧几里德生于雅典，当时雅典就是古希腊文明的中心。浓郁的文化气氛深深地感染了欧几里得，当他还是个十几岁的少年时，就迫不及待地想进入"柏拉图学园"学习。

教学流程	**讲授新课：** **定义 1：** 设n维向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$y=(y_1,y_2,\cdots y)^T$,规定x与y的内积为 $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$.当$x,y$均为列向量时，矩阵记号表示有 $$(x,y)=x^Ty=y^Tx.$$ 由定义，易证内积具有下列性质 （ⅰ）对称性：　$(x,y)=(y,x)$ （ⅱ）线性性：　$(kx,y)=k(x,y),(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$ （ⅲ）正定性：　$(x,x)\geq 0,(x,x)=0$的充要条件为$x=0$ 其中$x,y,z\in R^n,k\in R$ **定义 2** 设x=（$x_1,x_2,\cdots,x_n$）^{T},称$\sqrt{(x,x)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$为向量$x$的模或长度 记为$\|x\|$,即$\|x\|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$,当$\|x\|=1$时，称$x$为单位向量 向量的内积满足柯西——施瓦茨（Cauchy——Schwarz）不等式 $$\|(x,y)\|\leq\|x\|\|y\|$$ 根据内积满足柯西——施瓦茨不等式，我们可以利用内积定义向量之间的夹角。 **定义 3**　向量$x,y(x\neq 0,y\neq 0)$之间的夹角定义为 $$<x,y>=\arccos\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$$ 当$(x,y)=0$时，称向量x与y正交.显然若$x=0$,则x与任何向量都正交 在定义了内积运算的R^n中，三角形不等式和勾股定理仍然成立，即 $$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

教学流程

当$(x,y)=0$时,$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$

一组两两正交的非零向量，称为正交向量组。

定理 1

若n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是两两正交的一组非零向量，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关。

证明：设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

则　（$\alpha_i,\sum_{j=1}^{s}k_j\alpha_j$）$=k_i(\alpha_i,\alpha_i)=0,\quad i=1,2,\cdots,s.$

由于（α_i,α_i）>0,故$k_i=0,i=1,2,\cdots,s.$因此α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s线性无关。

定义 4 设向量组α_1，$\alpha_2,\cdots\alpha_r$是向量空间V的一个基，

若α_1，$\alpha_2,\cdots\alpha_r$两两正交，且都是单位向量，

则称α_1，$\alpha_2,\cdots\alpha_r$是V的一个标准正交基。

例1设α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r是向量空间v的一个标准正交基，求v中向量β在这

解：设$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r$,将此式两边对$\alpha_j(j=1,\cdots,r)$分别求内

（β，α_j）$=(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r)=\sum_{i=1}^{r}x_i(\alpha_i,\alpha_j)=x_j(\alpha_j,\alpha_j)=x_j$

所以β在标准正交基α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n下得坐标的第j个分量为

$$x_j=(\beta,\alpha_j)\qquad j=1,2,\cdots,n$$

施密特（Schimidt）正交化方法，这一过程也称为施密特正交化过程。

设α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r是向量空间v的一个基，

取$\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

… … …

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{(\alpha_r,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_r,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_r,\beta_{r-1})}{(\beta_{r-1},\beta_{r-1})}\beta_{r-1}$$

容易验证β_1，$\beta_2,\cdots$，β_r两两正交，

且β_1，$\beta_2,\cdots$，β_r与α_1，$\alpha_2,\cdots\alpha_r$等价，

教学流程

再将它们单位化为η_1，$\eta_2,\cdots$，η_r，

其中$\eta_j=\dfrac{1}{\|\beta_j\|}\beta_j \quad j=1,2,\cdots,r$，

这就由α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_r 构造出了标准

正交基η_1，$\eta_2,\cdots$，η_r。

例 1　已知$B=\{\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3\}$是$\mathbb{R}^3$的一组基，

其中$\alpha_1=(1,-1,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$，$\alpha_3=(1,-1,1)^T$.

试用施密特正交化方法，由B构造$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基。

解　取$\beta_1=\alpha_1=(1,-1,0)^T$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,0,1)^T-\frac{1}{2}(1,-1,0)^T=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)^T，$$

$$\begin{aligned}\beta_3&=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1\\&=(1,-1,1)^T-\frac{2}{3}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)^T-\frac{2}{2}(1,-1,0)^T\\&=(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})^T.\end{aligned}$$

再将β_1，β_2，β_3单位化，得$\mathbb{R}^3$的标准正交基为

$$\eta_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)^T，$$

$$\eta_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T，$$

$$\eta_3=\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T，$$

定义 5　若 n 阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，则称$\boldsymbol{A}$为正交矩阵，简称正交阵。

定理 2　$\boldsymbol{A}$为n阶正交矩阵的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$的列向量组为R^n的一组标准正交基.

教学流程	**证**: 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 按列分块为 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 于是 $A^TA=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{pmatrix}$ 因此, $A^TA=I$ 的充分必要条件是 $$\alpha_i^T\alpha_i=(\alpha_i,\alpha_i)=1, \qquad i=1,2,\cdots,n;$$ 且 $\alpha_i^T\alpha_j=(\alpha_i,\alpha_j)=0, \quad j\neq i, \quad i,j=1,2,\cdots,n.$ 即 A 的列向量组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为 R^n 的一组标准正交基. **定理 3** 设 A, B 皆是 n 阶正交矩阵, 则: （i）$\det A=1$或-1;（ii）$A^{-1}=A^T$; (iii) A^T(即A^{-1})也是正交矩阵; (iv) AB 也是正交矩阵. **证:**（iii） 由于$(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}A^T=AA^T=AA^{-1}=E$,所以$A^T$(即$A^{-1}$)也是正交矩阵; 从而的行向量组也是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基. (iv) 由 $(AB)^T(AB)=B^T(A^TA)B=B^TB=E$, 即的 AB 也是正交矩阵. **定理 4** 若列向量 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 在 n 阶正交矩阵 A 作用下变换为 $Ax,Ay\in R^n$, 则向量的内积、长度及向量的夹角都保持不变，即 $(Ax,Ay)=(x,y),\|Ax\|=\|x\|,\|Ay\|=\|y\|,$ $\langle Ax,Ay\rangle=\langle x,y\rangle.$ 证: $\begin{aligned}(Ax,Ay)&=(Ax)^T(Ay)=x^T(A^TA)y\\&=x^Ty=(x,y).\end{aligned}$ 当 $y=x$ 时，有 $(Ax,Ax)=(x,x)$, 即 $\|Ax\|=\|x\|$.同理 $\|Ay\|=\|y\|$. 因此

教学流程	$$\cos < Ax, Ay > = \frac{(Ax, Ay)}{\|Ax\|\|Ay\|} = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|} = \cos < x, y >,$$ 所以向量Ax与Ay的夹角等于x与y的夹角. **思政案例：体会数学运算的巧妙之处.感受转化的神奇力量.通过证明,训练学生的数学思维,让学生感受数学的巧妙之处,数学推理的严谨性.** **小结：** 1. 内积的定义及性质. 2. 正交矩阵的定义及性质. 3. 施密特正交化方法. **作业：** 课后 1 2 3 题
教　学 后　记	课后要认真总结，准确理解和掌握正交向量组的概念及基本性质． 能熟练运用施密特正交化方法，由一个线性无关向量组求出一个标准正交向量组，掌握正交矩阵的概念及其与标准正交基的关系．

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">相似矩阵　　内　容　方阵的特征值与特征向量、相似矩阵</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">§5.2 方阵的特征值与特征向量、相似矩阵</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>1. 矩阵的特征值与特征向量定义及计算
2.特征值与特征向量的基本性质</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　　日　第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：理解特征值、特征向量、特征矩阵、特征多项式、特征方程的定义。
能力目标：熟练掌握特征多项式、特征值、特征向量的求法。理解特征值、特征向量的基本性质。
素质目标（价值观目标）:通过本节课学习，提升学生学习数学的兴趣及应用数学的意识。
思政目标：培养学生严谨 科学的态度，让学生体会科学的方法论中严谨，实事求是的重要性，从而达到培养科学思维方式的目的。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：二、三阶矩阵特征值、特征向量的求法，特征值、特征向量的基本性质。
难点：特征值、特征向量的基本性质的应用。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">教师课前充分备课，了解学情；学生需要具备初等数学知识和计算技能。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、启发式教学、案例教学等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线上线下混合式教学</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">作业：习题五 13，14，15
思考：(B) 7</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006
2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009
3.同济大学数学系. 工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社. 2014</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

教学流程	§5.2 方阵的特征值与特征向量、相似矩阵 **导入** 本节将通过行列式及方程组的相关知识，学习方阵的特征多项式，进而学习方阵 A 的特征值与特征向量。 **讲授新课** 设A为n阶方阵，若存在数λ和非零n维列向量x,使得$Ax=\lambda x$,则称λ方阵 A 的特征值，非零向量 x 称为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量。 **定义 2** 设 n阶方阵 $A=(a_{ij})$, 则 $$f(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$ 称为方阵 A 的特征多项式，$\lambda E-A$ 称为 A 的特征矩阵，$f(\lambda)=0$ 称为 A 的特征方程。 **思政案例：特征值和特征向量是矩阵特征的重要体现，生活中要注意善于提炼，在复杂的社会现象中练就通过现象看本质的能力，遇事坚持自己的特质和原则，如此才能轻装上阵，提高效率。** **例 1** 求矩阵$\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 3 & 1 & -1\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$的特征值与特征向量。 **解**　矩阵 A 的特征方程为 $$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 1 & 1\\ -3 & \lambda-1 & 1\\ -4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=0$$ 该特征矩阵的行列式的每行之和均为$\lambda-3$，将各列加到第 1 列，并将第 1 行乘－1 加到第 2、3 行得 $$\det(\lambda E-A)=(\lambda-3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-2)^2=0$$

教学流程	内容

教学流程

故 A 得特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$（二重特征值）。

当 λ_1＝3时，由（λ_1E-A）$x = 0$，即

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得其基础解系为 $x_1 = (1,1,1)^T$，所以 $k_1 x_1$ (k_1 为非零任意常数）是 A 的对应于 $\lambda_1 = 3$ 的全部特征向量。

当 $\lambda_2 = 2$ 时，由 $(\lambda_2 E - A) = 0$，即

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得其基础解系为 $x_2 = (1,1,2)^T$,因此，$k_2 x_2$ (k_2为非零任意常数) 是 A 的对应于 λ_2＝2 的全部特征向量。

例 2 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量。

解

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)\begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ 4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 \end{aligned}$$

所以 A 的特征值为 λ_1＝-1，λ_2＝λ_3＝2

当 λ_1＝-1时，解方程（-E-A）$x = 0$。由

教学流程	$$-E-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-3&0\\4&-1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$ 得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 所以对应于λ_1＝-1的全部特征向量为$kp_1(k\neq 0)$。 当λ_2＝λ_3＝2时，解方程$(2E-A)x=0$。由 $$2E-A=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\0&0&0\\4&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$ 得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},$ 所以对应于λ_2＝λ_3＝2的全部特征向量为 $$k_2p_2+k_3p_3\quad(k_2,k_3\text{不同时为}0)。$$ **性质 1**：设n阶矩阵A＝（a_{ij}）的特征值为λ_1，λ_2,…，λ_n,则 （i）$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$; （ii）$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\|A\|$ **性质 2**：若λ是方阵A的特征值，x是A的属于λ的特征向量,则 （i）$k\lambda$是kA的特征值（k是任意常数）, （ii）λ^m是A^m的特征值（m为正整数）, （iii）当可逆时，λ^{-1}是A^{-1}的特征值; 且x仍为矩阵kA,A^m,A^{-1}的分别对应于特征值$k\lambda,\lambda^m,\dfrac{1}{\lambda}$的特征向量。 由此可推出：若$\lambda$为$A$的特征值,则$\varphi(\lambda)$是$\varphi$(A)的特征值,其中 $\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m,\varphi(A)=a_0I+a_1A+\cdots+a_mA^m$

教学流程

性质 3 A与A^{T}有相同的特征值.

定义 3 设 A， B 均为n阶矩阵,若存在可逆n阶矩阵P, 使$\mathrm{P}^{-1}AP=B$. 则称 B 是 A 的相似矩阵，或称 A 与 B 相似。记为 $A\sim B$. 对 A 进行运算 $P^{-1}AP$ 称为对 A 进行相似变换，可逆阵 P 称为将 A 变成 B 的相似变换矩阵。

矩阵的相似关系也是一种等价关系，即有

（i）反身性： $A\sim A$

(ii)对称性：若 $A\sim B$,则$B\sim A$

(iii)传递性： 若$A\sim B, B\sim C$,则$A\sim C$

思政案例：相同的特征多项式和特征值说明“形变而质不变”的辩证思想。

定理 1 相似矩阵的特征值相同。

证 只需证明相似矩阵有相同的特征多项式。设 $A\sim B$，则存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=B$$

于是

$$\begin{aligned}|\lambda \mathrm{E}-B|&=|\lambda \mathrm{E}-P^{-1}AP|\\&=|P^{-1}(\lambda \mathrm{E}-A)P|=|P^{-1}||\lambda \mathrm{E}-A||P|\\&=|\lambda \mathrm{E}-A| \quad (因|P^{-1}||P|=1)\end{aligned}$$

必须注意，定理 1 的逆命题不成立，例如

$$\mathrm{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

都以 1 为二重特征值，但对于任何可逆矩阵 P，都有 $P^{-1}\mathrm{E}P=\mathrm{E}\neq A$, 故 A 和 E 不相似。

推论：若 n 阶矩阵 A 与对角阵 $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$

相似，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的$n$个特征值 。

证：因 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$\Lambda$的$n$个特征值，由定理 1 知

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的$n$个特征值 。

	小结 1.矩阵的特征值和特征向量. 2.矩阵的相似 **作业** 习题五 13，14，15
教　学 后　记	本节课学习了矩阵的特征值和特征向量,掌握求矩阵的特征值和特征向量的方法以及特征值与特征向量的一些常用性质.

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">相似矩阵　　内　容　　方阵的对角化</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">§5.3 方阵的对角化</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>1. 矩阵的相似概念、性质
2. 矩阵的相似对角化
3. 矩阵的相似对角化的应用</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　日　第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：理解相似矩阵的概念、性质，理解矩阵的相似对角化
能力目标:掌握化矩阵对角形的方法。
素质目标（价值观目标）:通过本节课学习，提升学生学习数学的兴趣及应用数学的意识。
思政目标：培养学生严谨 科学的态度，让学生体会科学的方法论中严谨，实事求是的重要性，从而达到培养科学思维方式的目的。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：相似矩阵的概念、性质，矩阵的相似对角化，如何将一个矩阵化为相似对角阵。
难点：如何将一个矩阵化为相似对角阵。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">教师课前充分备课，了解学情；学生需要具备初等数学知识和计算技能。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、启发式教学、案例教学等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线上线下混合式教学</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">作业：习题五 16，17，18
思考：(B) 6　9.</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006
2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009
3.同济大学数学系．工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社. 2014</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>

§5.3 方阵的对角化

导入

形式最简单的矩阵是n阶对角形矩阵，这一节里,将研究一个n阶矩阵什么时候与一个对角矩阵相似的问题.

讲授新课

定理

1 n阶方阵A与对角阵相似的充要条件是A有n个线性无关的特征向量.

证：必要性：设

$$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \overset{记作}{=} \Lambda,$$

即 $$AP = P\Lambda.$$

将P矩阵按列分块，表示成

$$P = (x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

则

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即 $$(Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_n) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots, \lambda_n x_n)$$

于是

$$Ax_i = \lambda_i x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)。$$

故$x_1, x_2, \cdots, x_n$是A分别对应于特征值λ_1，λ_2，…，λ_n的特征向量。由于P可逆，所以它们是线性无关的，必要性得证。

上述步骤显然可逆，所以充分性也成立。

定理 2 矩阵A的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

证：设A的m个互不相同的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，其相应的特征向量分别为$x_1, x_2, \cdots, x_m$。

对m作归纳法，证明$x_1, x_2, \cdots, x_m$线性无关。

</td>
</tr>
</table>

教学流程	当 m =1 时，结论显然成立（因特征向量 $x_1 \neq 0$） 设 k 个不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 的特征向量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 线性无关，下面考虑 $k+1$ 个不同特征值的特征向量的情况。 设 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k + a_{k+1}x_{k+1} = 0$ 则 $A(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k + a_{k+1}x_{k+1})=0,$ （5.1） 即 $a_1\lambda_1x_1 + a_2\lambda_2x_2 + \cdots + a_k\lambda_kx_k + a_{k+1}\lambda_{k+1}x_{k+1} = 0.$ （5.2） 将(5.1)式乘 λ_{k+1}，再减去(5.2)式得 $a_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)x_1 + a_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)x_2 + \cdots + a_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)x_k = 0$ 根据归纳假设 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 线性无关，所以 $a_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, k.$ 由于 $\lambda_{k+1} \neq \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, k.$ 所以 $a_i = 0, i = 1, 2, \cdots, k.$ （5.3） 将(5.3)式代入(5.1)式，得 $a_{k+1}x_{k+1} = 0$ 由于特征向量 $x_{k+1} \neq 0$，故 $a_{k+1} = 0$，故 $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$ 线性无关。 **推论**：若 n 阶矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值，则 A 与对角阵相似. **定理 3** 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 为 n 阶矩阵 A 有m个互不相同的特征值，对应于 λ_i 的线性无关的特征向量为 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r_i}}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$，则由所有这些特征向量（共 $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ 个）构成的向量组（$x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r_i}} \mid i = 1, 2, \cdots, m$）是线性无关的。 **证** 设 $\sum_{i=1}^{m}(k_{i_1}x_{i_1} + k_{i_2}x_{i_2} + \cdots + k_{i_{r_i}}x_{i_{r_i}}) = 0$ （5.4） 记 $y_i = k_{i_1}x_{i_1} + k_{i_2}x_{i_2} + \cdots + k_{i_{r_i}}x_{i_{r_i}}$ （5.5）

教学流程	(5.4)式化为 $y_1 + y_2 + \cdots + y_m = 0$ (5.6) 其中 y_i 是对应于 λ_i 的特征向量或零向量（$i=1,2,\cdots,m$）。根据定理 2，(5.6)式中的 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 都不是特征向量（因为它们中如果有一个或几个是特征向量，则由其线性无关性可知它们之和不等于 0），所以 $y_i = 0, i = 1, 2, \cdots, m$ (5.7) 由于 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r_i}}$ 是线性无关的，因此由(5.7)和(5.5)可得 $k_{i_1} = k_{i_2} = \cdots = k_{i_{r_i}} = 0, i = 1, 2, \cdots, m$ 故定理的结论成立。 **定理 4** 设 λ_0 是 n 阶矩阵 A 的一个 k 重特征值，对应于 λ_0 的线性无关的特征向量的最大个数为 l，则 $k \geq l$。 **证：** 用反证法。设 $l > k$, 由于 $Ax_i = \lambda_0 x_i, x_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, l$ (5.8) 将 $x_1, x_2, \cdots, x_l$ 扩充为 n 维向量空间 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $x_1, x_2, \cdots, x_l, x_{l+1}, \cdots, x_n,$ 其中 $x_{l+1}, \cdots, x_n$ 一般不是 A 的特征向量，但 $Ax_m \in \mathbb{C}^n (m = l+1, \cdots, n)$, 可用上述的一组基线性表示，即 $Ax_m = a'_{1m}x_1 + a'_{2m}x_2 + \cdots + a'_{lm}x_l + a'_{l+1m}x_{l+1} + \cdots + a'_{nm}x_n$ $(m = l+1, \cdots, n)$ (5.9) 将(5.8)，(5.9)中的 n 个不等式写成一个矩阵等式 $A\,(x_1, \cdots, x_l, x_{l+1}, \cdots, x_n)$

教学流程

$$= (x_1,\cdots,x_l,x_{l+1},\cdots,x_n)\left(\begin{array}{ccc:ccc} \lambda_0 & & & a'_{1l+1} & \cdots & a'_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \lambda_0 & a'_{ll+1} & \cdots & a'_{ln} \\ \hdashline & & & a'_{l+1l+1} & \cdots & a'_{l+1n} \\ & \mathbf{0} & & \vdots & & \vdots \\ & & & a'_{nl+1} & \cdots & a'_{nn} \end{array}\right)$$

(5.10)

其中 λ_0 有 l 个。

记 $$P=(x_1,\cdots,x_l,x_{l+1},\cdots,x_n),$$

并将 (5.10)式右端矩阵分块表示，则有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_0 E_l & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

根据相似矩阵有相同的特征多项式，得

$$\begin{aligned} \left|\lambda E_n - A\right| &= \left|\lambda E_n - P^{-1}AP\right| \\ &= \begin{vmatrix} (\lambda-\lambda_0)E_l & -A_1 \\ 0 & \lambda E_{n-l}-A_2 \end{vmatrix} \\ &= \left|(\lambda-\lambda_0)E_l\right|\left|\lambda E_{n-l}-A_2\right| \\ &= (\lambda-\lambda_0)^l g(\lambda) \end{aligned}$$

(5.11)

其中 $g(\lambda)=\left|\lambda E_{n-l}-A_2\right|$ 是 λ 的 $n-l$ 次多项式。

由(5.11)式可知，λ_0 至少是 A 的 $l(l>k)$ 重特征值，与 λ_0 是 k 重特征值矛盾。所以 $l\le k$。

定理 5 n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似的充分必要条件是：A 的每个特征值对应的特征向量线性无关的最大个数等于该特征值的重数（即 A 的每个特征子空间 V_{λ_i} 的维数等于特征值 λ_i 的重数）。

证：设 $\left|\lambda I - A\right| = \prod_{i=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$,

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{C}$ 且互异，又有 $\sum_{i=1}^{m} r_i = n.$

充分性：由于对应于 λ_i 的特征向量有 r_i 个线性无关，又

教学流程	m个特征值互异，由定理 3，A有 n个线性无关的特征向量，依据定理1，A与对角阵相似 。 必要性：用反证法，设有一个特征值 λ_i 所对应的线性无关的特征向量的最大个数 $l_i < \lambda_i$的重数r_i，则由定理4可知，A的线性无关的特征向量个数小于n，故 A 不能与对角阵相似。 **例 1**　设实对称矩阵 $$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}.$$ 问：A 是否与对角阵相似？若与对角阵相似，求对角阵 Λ 及可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ 。再求 A^k (k为正整数)。 **解**　A 的特征多项式 $$\|\lambda E-A\|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&1&1\\1&\lambda-1&1&1\\1&1&\lambda-1&1\\1&1&1&\lambda-1\end{vmatrix}$$ $$=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&\lambda-1&1&1\\1&1&\lambda-1&1\\1&1&1&\lambda-1\end{vmatrix}$$ $$=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&\lambda-2&0&0\\0&0&\lambda-2&0\\0&0&0&\lambda-2\end{vmatrix}$$ $$=(\lambda+2)(\lambda-2)^3$$ 所以 A 得特征值 $\lambda_1=-2$（单根），$\lambda_2=2$（三重跟）。 由（λ_1E-A）$x=0$,即

教学流程	$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 得λ_1对应的特征向量为$\left\{k_1\alpha_1 \middle| \alpha_1=(1,1,1,1)^T, k_1\neq 0\right\}$。 由（$\lambda_2$E-A）$x=0$,即 $$x_1+x_2+x_3+x_4=0$$ 得基础解系为$\alpha_2=(1,-1,0,0)^T, \alpha_3=(1,0,-1,0)^T, \alpha_4=(1,0,0,-1)^T$。 A有 4 个线性无关的特征向量，故A与对角阵相似。 取 $$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$ $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}=\Lambda.$$ Λ的 4 个对角元依次是 4 个特征向量所对应的特征值。由于特征向量（或$(\lambda E-A)x=0$的基础解系）不唯一，所以P也不唯一。 由$A=P\Lambda P^{-1}$,可得 $$A^k=(P\Lambda P^{-1})^k=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^k P^{-1}$$ $$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^k & & & \\ & 2^k & & \\ & & 2^k & \\ & & & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$ $$=\begin{cases} 2^k E_4, k\text{是偶数}, \\ 2^{k+1}A, k\text{是奇数}. \end{cases}$$ **定理 6** 实对称矩阵A的任一个特征值都是实数。 **证：**设λ是A的任一个特征值。又$\overline{A}^T=A$,（$\overline{A}$为A的共轭矩阵，即若

教学流程	$A=(a_{ij})$, 则 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$)，和 $Ax=\lambda x$, 有 $$\overline{(Ax)}^T=\overline{(\lambda x)^T},$$ $$\overline{x^T A^T} x=\overline{\lambda}\overline{x}^T x,$$ $$\overline{x}^T Ax=\lambda\overline{x}^T x=\overline{\lambda}\overline{x}^T x.$$ 又 $x\neq 0, \overline{x}^T x>0$, 所以 $\lambda=\overline{\lambda}$, 即 λ 为实数。 **定理 7** 实对称矩阵 A 对应于不同特征值的特征向量是正交的。 **证** 设 $Ax_i=\lambda_i x_i, (x_i\neq 0, i=1,2), \lambda_1\neq\lambda_2, A^T=A$, 则 $$\lambda_1 x_2^T x_1=x_2^T Ax_1=x_2^T A^T x_1=(Ax_2)^T x_1 =(\lambda_2 x_2)^T x_1=\lambda_2 x_2^T x_1.$$ 由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $x_2^T x_1=0$，故 x_1 与 x_2 正交。 **思政案例：通过矩阵与对角形矩阵的相似，渗透“对立与统一”的辩证思想，“对立”由此知彼，“统一”互为利用。** **定理 8** 对于任一个 n 阶实对称矩阵 A，存在 n 阶正交矩阵 T，使得 $$T^{-1}AT=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$ **证：** 用数学归纳法。$n=1$ 时，结论显然成立。 假设定理对任一个 $n-1$ 阶实对称矩阵 B 成立，即存在 $n-1$ 阶正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}BQ=\Lambda_1$. 下面证明 n 阶实对称矩阵 A 也成立。 设 $Ax_1=\lambda_1 x_1$，其中 x_1 是长度为 1 的特征向量。现将 x_1 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $$x_1,x_2,\cdots,x_n,$$ 其中 $x_2,\cdots,x_n$ 不一定是 A 的特征向量，于是就有 $$A(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(Ax_1,Ax_2,\cdots,Ax_n) =(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}. \quad (5.12)$$ 记 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ （P 为正交矩阵）， 并将(5.12)式右端矩阵用分块矩阵表示，(5.12)式可写为

教学流程

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & b\\ 0 & B\end{pmatrix}. \qquad (5.13)$$

由于 $P^{-1}=P^T,(P^{-1}AP)^T=P^TA^T(P^{-1})^T=P^{-1}AP,$ 所以

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ b^T & B^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & b\\ 0 & B\end{pmatrix}$$

因此，$b=0,B^T=B$（即 B 为 n-1 阶实对称矩阵），代入(5.13)式得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$$

根据归纳假设，构造一个正交矩阵

$$S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix},$$

（读者不难验证 $S^TS=E_n$），便有

$$\begin{aligned}S^{-1}(P^{-1}AP)S&=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & Q^{-1}BQ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \Lambda_1\end{pmatrix}\\&=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\end{aligned}$$

取 T=PS（两个正交矩阵之积仍是正交矩阵），$T^{-1}=S^{-1}P^{-1},$ 则

$$T^{-1}AT=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值。

例 2 设矩阵

$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$，试判断 A 是否可与对角矩阵相似，并求 A^5。

解 矩阵 A 的特征多项式

$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ ，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，

$\lambda_2=\lambda_3=2$。

教学流程

当 $\lambda_1=1$ 时，解齐次线性方程组 $(E-A)x=0$：

$$E-A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可得基础解系为 $\alpha_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，解齐次线性方程组 $(2E-A)x=0$：

$$2E-A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可得，基础解系为 $\alpha_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$

因为矩阵 A 有三个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，所以 A 可与对角矩阵相似。

令

$$P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$$

则 $P^{-1}AP=\Lambda$，于是 $A=P\Lambda P^{-1}$，有

$$\begin{aligned}A^5&=\left(P\Lambda P^{-1}\right)\left(P\Lambda P^{-1}\right)\cdots\left(P\Lambda P^{-1}\right)\\&=P\Lambda\left(P^{-1}P\right)\Lambda\left(P^{-1}P\right)\cdots\left(P^{-1}P\right)\Lambda P^{-1}\\&=P\Lambda^5P^{-1}\end{aligned}$$

容易求得

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

得

$$\begin{aligned}A^5&=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2^5 & \\ & & 2^5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1 & 31 & -31\\ -62 & 94 & -62\\ -62 & 62 & -30\end{pmatrix}\end{aligned}$$

把矩阵 A 先对角化再求 A^k，是计算矩阵的幂的方法之一。

教学流程	**例 3** 设实对称矩阵 $$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}$$ 求正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。 解 矩阵 A 的特征方程为 $$\lvert\lambda E-A\rvert=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}=0$$ 由此得 $(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)=0,$ 所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=5.$ 当 $\lambda_1=-1$ 时，解齐次线性方程组 $(-E-A)x=0,$ 得其基础解系为 $\alpha_1=(2,2,1)^T.$ 当 $\lambda_2=2$ 时，解齐次线性方程组 $(2E-A)x=0,$ 得其基础解系为 $\alpha_2=(2,-1,-2)^T.$ 当 $\lambda_3=5$ 时，解齐次线性方程组 $(5E-A)x=0,$ 得其基础解系为 $\alpha_3=(1,-2,2)^T.$ 不难验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是正交向量组。把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化，得 $$\beta_1=\frac{1}{\lVert\alpha_1\rVert}\alpha_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad \beta_2=\frac{1}{\lVert\alpha_2\rVert}\alpha_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$ $$\beta_3=\frac{1}{\lVert\alpha_3\rVert}\alpha_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

教学流程	令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ 则 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ **例 4** 设实对称矩阵为 $$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$$ 求正交矩阵 Q，使 Q^TAQ 为对角矩阵。 **解** $$\lvert\lambda E-A\rvert=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$$ 所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$ 当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解齐次线性方程组 $(E-A)x=0,$ 得其基础解系 $\alpha_1=(-2,1,0)^T,\alpha_2=(2,0,1)^T.$ 利用施密特正交化方法，将 α_1,α_2 正交化： 令 $\beta_1=\alpha_1$ $$\beta_2=\alpha_2-\frac{\alpha_2^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-(-\frac{4}{5})\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/5\\4/5\\1\end{pmatrix}$$ 再将 β_1,β_2 单位化，得 $$\gamma_1=\frac{1}{\lVert\beta_1\rVert}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

<table>
<tr><td>教学流程</td><td>

$$\gamma_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\frac{5}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{4}{5}\\ 1\end{pmatrix}$$

当 $\lambda_3=10$ 时，解齐次线性方程组 $(10E-A)x=0$, 得其基础解系 $\alpha_3=(1,2,-2)^T$, 单位化得

$$\gamma_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$$

$$令\ Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3}\\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

则有 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}$。

思政案例：通过计算让学生体会科学的方法论中严谨，实事求是的重要性，从而达到培养科学思维方式的目的。

小结：相似矩阵的概念、性质，矩阵的相似对角化，如何将一个矩阵化为相似对角阵。
作业：习题五 16，17，18

</td></tr>
<tr><td>教 学
后 记</td><td>本节主要学习了相似矩阵的概念、性质，矩阵的相似对角化，如何将一个矩阵化为相似对角阵。难点的地方是化矩阵与对角形矩阵相似，综合性很强，涉及行列式和方程组的知识点，引导学生复习前面章节所学的内容。</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="5">二次型　　内　容　二次型及其矩阵表示、合同矩阵</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="3">§6.1 二次型及其矩阵表示、合同矩阵
§6.2 化二次型为标准形</td><td>教学
时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>1.二次型的基本概念
2.线性替换 3.矩阵的合同
4.用配方法化二次型为标准型
5.用正交变换法化二次型为标准型</td><td>时间</td><td colspan="3">年　月　　日　第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">知识目标:了解二次型的定义，掌握二次型的矩阵表示方法，理解非退化线性替换、合同矩阵的概念及其性质。
能力目标:掌握配方法将二次型化为标准型的过程。熟练掌握用正交变换法化二次型为标准型。
思政目标：培养学生严谨科学的态度，让学生体会科学的方法论中严谨，实事求是的重要性，从而达到培养科学思维方式的目的。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="5">重点：理解非退化线性替换、合同矩阵的概念及其性质，用两种方法化二次型为标准型。
难点：合同矩阵的概念及其性质，用正交变换法化二次型为标准型。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="5">教师课前充分备课，了解学情；学生需要具备矩阵的相关计算能力。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="5">课堂讲授、启发式教学、案例教学等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="5">线上线下混合式教学</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="5">作业：习题六： 1，2，5，6</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="5">1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006
2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009
3.同济大学数学系．工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社．2014</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>

导入：

二次型的系统研究是从 18 世纪开始的，它起源于对二次曲线和二次曲面的分类问题的讨论，将二次曲线和二次曲面的方程变形，选有主轴方向的轴作为坐标轴以简化方程的形状，这个问题是在 18 世纪引进的。柯西在其著作中给出结论：当方程是标准型时，二次曲面用二次型的符号来进行分类。然而，那时并不太清楚，在化简成标准型时，为何总是得到同样数目的正项和负项。西尔维斯特回答了这个问题，他给出了 n 个变数的二次型的惯性定律，但没有证明。这个定律后被雅克比重新发现和证明。1801 年，高斯在《算术研究》中引进了二次型的正定、负定、半正定和半负定等术语。

新知讲解：

定义 1 含有n个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次多项式

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\&\quad+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\quad+a_{nn}x_n^2 \qquad (6.1)\end{aligned}$$

当系数属于数域F时，称为数域F上的一个n**元二次型**。本章讨论实数域上的n元二次型，简称二次型。

由于$x_ix_j=x_jx_i$，具有对称性，若令

$$a_{ji}=a_{ij},\quad i<j \qquad (6.2)$$

则$2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i(i<j)$，于是$(6.1)$可以写成对称形式

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\&\quad+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\&\quad+\cdots\\&\quad+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\&=\sum_{i=1}^n x_i(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots a_{in}x_n)\end{aligned}$$

</td>
</tr>
</table>

教学流程	$$=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \qquad (6.3)$$ $$=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n\end{pmatrix}$$ $$=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x^TAx \qquad (6.4)$$ 其中： $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T,A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$. 并称 A 为二次型 (6.3) **对应的矩阵.** 对于任意一个二次型（6.1），总可以通过（6.2），使其写成对称式（6.3），并对应于矩阵 A. 由（6.2）知， A 为对称矩阵，又若 A,B 为 n 阶对称方阵，且 $$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx=x^TBx$$ 则必有 $A=B$ 例如，二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x_1x_2+x_1x_3+2x_2^2-3x_2x_3$ 的矩阵是 $$A=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&2&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&0\end{pmatrix}$$ A 是一个对称矩阵。反之，对称矩阵 $$A=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&2&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&0\end{pmatrix}$$ 所对应的二次型是 $$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^TAx=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&2&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

教学流程	$= x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2^2 - 3x_2x_3$ 在解析几何中，为了确定二次方程 $ax^2 + 2bxy + cy^2 = d \qquad (a,b,c,\text{不全为零})$ 所表示的曲线的性态，通常利用旋转变换公式： $\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$ 选择适当的θ，可使上面的方程化为 $ax'^2 + by'^2 = d'$ 在旋转变换公式中，θ选定后$\cos\theta,\sin\theta$是常数。x,y由x',y'的线性表达式给出，这一线性表达式称为线性变换。 **定义 2** 关系式 $\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \qquad (6.5)$ 称为由变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$到变量$y_1,y_2,\cdots,y_n$的一个线性变量替换，简称线性变换。矩阵 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$ 称为线性变换（6.5）的矩阵，$\lvert C \rvert \neq 0$时称线性变换（6.5）为非退化的线性变换或可逆的线性变换。 如上例中，因为$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1 \neq 0$，所以$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$是一个非退化的线性变换。 设 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$是两个$n$元变量，则线性变换（6.5）可以写成以下矩阵形式： $x = Cy$

教学流程	当$\lvert C\rvert \neq 0$时，即线性变换为非退化时，此时有 $y = C^{-1}x$ 把式（6.5）代入（6.4），有 $x^T Ax = (Cy)^T A(Cy) = y^T C^T ACy = y^T By$ 其中$B = C^T AC, B^T = (C^T AC)^T = C^T AC = B$，因此$y^T By$是以$B$为矩阵的$y$的$n$元二次型。 如果线性变换（6.5）是非退化线性变换，$y^T By$有下面的形状： $d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots d_r y_r^2$ 其中$d_i \neq 0 \quad (i = 1,2,\cdots r, r \leq n)$. 我们称这个形状的二次型为二次型的一个标准形。易知，$r = R(A) = R(B)$. **知识点巩固：** **例** 1 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$ 化为标准形。 **解**：由于标准形是平方项的代数和，可通过配方法将二次型改写成 $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$ $= x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$ $= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$ $= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2 \qquad ①$ 令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$，$\lvert C\rvert = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ 代入式①中，得原二次型的标准形 $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

教学流程	其矩阵 $$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$ 因为原二次型的矩阵为 $$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&1\end{pmatrix}$$ 线性变换的矩阵为 $$C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\text{且}\lvert \mathrm{C}\rvert=1\neq 0$$ 通过计算可以验证 $$C^{T}AC=B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$ 是对角矩阵，且 $$f=y^{T}By=y_1^2+y_2^2-y_3^2$$ 可见，要把二次型化为标准形，关键在于求出一个非奇异矩阵C,使得$C^{T}AC$是对角矩阵。 **定义 3.** 设A,B为两个n阶矩阵，如果存在n阶非奇异矩阵C，使得 $$C^{T}AC=B$$ 则称矩阵A合同于矩阵B,或A与B合同，记为 $A\simeq B.$ 可见，二次型(6.4)的矩阵A与经过非退化线性变换$x=Cy$得出的二次型的矩阵$C^{T}AC$是合同的。如本节例 1 中有 $$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&1\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$ 合同关系具有以下性质： （1）对于任意一个方阵A，都有$A\simeq A$ 因为$I_n^{T}AI_n=A$,其中I_n为n阶单位矩阵.

教学流程	（2）如果 $A \simeq B$,则$B \simeq A$.

因为$C^T AC = B$,则（C^{-1}）$^T BC^{-1} = A$.

（3）如果 $A \simeq B, B \simeq C$，则 $A \simeq C$.

因为$C_1^T AC_1 = B$，$C_2^T BC_2 = C$,则

$(C_1C_2)^T A(C_1C_2) = C$ 而 $\left|C_1C_2\right| \neq 0$.

一、用配方法化二次型为标准形

定理 1 任何一个二次型都可以通过非退化线性变换化为标准形（证明略）。

定理 2 对任意一个 n 阶实对称矩阵 A，都存在可逆矩阵 C，使得

$$C^T AC = diag\left(d_1, d_2, \cdots d_n\right)$$

知识点巩固：

例 1 用配方法把三元二次型

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 \qquad ①$$

化为标准形，并求所用的线性变换 $x = Cy$ 及变换矩阵 C。

解 先按 x_1^2 及含有 x_1 的混合项配成完全平方，即

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2\left[x_1^2 + 2x_1\left(x_2 + x_3\right) + \left(x_2 - x_3\right)^2\right] - 2\left(x_2 - x_3\right)^2 + 3x_2^2 + .$$

$$= 2\left(x_1 + x_2 - x_3\right)^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3,$$

在上式中，再按 $x_2^2 - 4x_2x_3$ 配成完全平方，于是

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2\left(x_1 + x_2 - x_3\right)^2 + \left(x_2 - 2x_3\right)^2 - 5x_3^2 \qquad ②$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \qquad ③$$

将③式代入②式，得二次型的标准形

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2y_1^2 + y_2^2 - 5y_3^2 \qquad ④$$

教学流程	从③式中解出 x_1, x_2, x_3，得 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad ⑤$$ ⑤式是化二次型①为其标准形④所做的线性变换 $x = Cy$（其中变换解析 C 是⑤式中的三阶矩阵）. 对于一般的 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，如果 x_1^2 的系数不为零，一般都可像例 1 那样将其化为标准形。如果 x_1^2 得系数为零，而 x_2^2 的系数不为零，配方可先从 x_2 开始。如果所有平方项的系数全为零，二次型中只含混合项，此时可按下面例 2 的方法，将其化为标准形。 **例 2** 用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$ 为标准形，并求所做的线性变换。 **解** 因为二次型中没有平方项，无法配方，所以先做一个线性变换，使其出现平方项。根据 x_1x_2，利用平方差公式，令 $$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \qquad ①$$ 将①式代入二次型，得 $$f(x_1, x_2, x_3) = 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 4(y_1 + y_2)y_3 = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3$$ 再用例 1 中的配方法，先对含 y_1 的项配完全平方，然后对含 y_2 的项配完全平方，得到 $$f(x_1, x_2, x_3) = 2(y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_3^2 - 2y_2^2 + 4y_2y_3 = 2(y_1 + y_3)^2 - 2(y_2 - y_3)^2 \qquad ②$$ 令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$

教学流程

即
$$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_2 = z_3 \end{cases} \qquad ③$$

将③式代入②式. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 就化成了标准形，即

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2 \qquad ④$$

这里把二次型 $2x_1x_2 + 4x_1x_3$ 化成标准形 $2z_1^2 - 2z_2^2$，做了①式和③式的两次线性变换，它们分别记做

$$x = C_1 y \qquad \text{和} \qquad y = C_2 z$$

其中

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ⑤$$

$$x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}, \qquad y = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}, \qquad z = (z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{T}} .$$

于是 $x = (C_1 C_2) z$ 就是二次型化成④式标准形所作的线性变换，其中变换矩阵

$$C = C_1 C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这里原二次型 $2x_1x_2 + 4x_1x_3$ 及其标准形 $2z_1^2 - 2z_2^2$ 所对应的矩阵，分别是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} .$$

读者不难验证，$C^T A C = diag(2, -2, 0)$.

任一个 n 阶实对称矩阵 A，也都可以通过一系列相同类型的初等行、列变换化成其合同标准形（对角形矩阵）。所谓相同类型的初等行、列变换，指的是：

（1）如果用倍加初等阵 $E_{ij}(c)$ 右乘 A（即将 A 的第 i 列乘 c 加到第 j 列），那么相应地也用 $E_{ji}^T(c) = E_{ij}(c)$ 左乘 A（即将列变换后的 A 的第 i 行乘 c 加到第 j 行）。变换后的矩阵 $E_{ji}^T(c) A E_{ij}(c)$ 仍是对称矩阵.

教学流程	（2）如果用 $E_i(c)$ 右乘 A，则也用 $E_i^T(c)=E_i(c)$ 左乘 A，即 A 得第 i 列和第 i 行都乘非零常数 c（其中元素 a_{ii} 乘 c^2），显然 $E_i^T(c)AE_i(c)$ 仍是对称矩阵. （3）如果用 E_{ij} 右乘 A，则也用 $E_{ji}^T=E_{ij}$ 左乘 A，即 A 的第 i 列和第 j 对换，列变换后的 A 的第 i 行和第 j 列对换，如此所得 $E_{ji}^TAE_{ij}$ 也是对称矩阵. 对于一个 n 阶实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$： （1）如果 $a_{11}\neq 0$，由于 $a_{1j}=a_{j1}(j=1,2,\cdots,n)$，因此对 A 做相同的倍加行、列变换，可将第 1 行与第 1 列的其他元素全化为零，得 $$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$ 其中 A_1 是 $n-1$ 阶实对称矩阵. （2）如果 $a_{11}=0$，但存在 $a_{ii}\neq 0$，此时，先将第 1 列与第 i 列对换，再将第 1 行与第 i 行对换，这样，a_{ii} 就换到了第 1 行、第 1 列的位置，如此就化为上面（1）的情况. （3）如果主对角元 a_{ii} 全为零，但必存在 $a_{ij}\neq 0$，此时，先将第 j 列加到第 i 列，再将第 j 行加到第 i 行，这样，第 i 行、第 i 列元素就化为 $2a_{ij}\neq 0$，如此就化为上面（2）的情况. **二、用正交变换法化二次型为标准形** 如果线性变换的系数矩阵是正交矩阵，则称它为正交变换. **定理 3** 对于二次型 $f(x)=x^TAx$，一定存在正交矩阵 Q，使得经过正交变换 $$x=Qy$$ 后能够把它化为标准形 $$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$ 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 是二次型 $f(x)$ 的矩阵 A 的全部特征值. 证：因为 A 是实对称矩阵，由上一章第三节定理 8 可知，一定存在正交

教学流程	矩阵 Q，使得 $$Q^T AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$ 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ 是矩阵 A 的全部特征值. 作正交变换 $$x = Qy$$ 所得到的新二次型的矩阵为 $Q^T AQ$，因此新二次型为 $$f = y^T \left(Q^T AQ\right) y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$ **知识点巩固：** **例 3** 用正交变换把下面的二次型化为标准形，并写出所作的正交变换. $$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2$$ **解**：二次型的矩阵为 $$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$ 在第五章第三节的例 4 中，我们已求得 A 的特征方程 $$\left\|\lambda E - A\right\| = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 10) = 0$$ 和特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$，并求出使 A 相似于对角矩阵的正交矩阵 $$Q = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$ 因此，作正交变换 $x = Qy$，就可以使二次型化为标准形 $$f = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$ **例 4** 已知二次型 $$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 \qquad (a > 0)$$

教学流程	通过正交变换化为标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$. 求参数 a 的值及所用的正交变换矩阵. **解**：二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}$. A 的特征多项式 $$\lvert \lambda E - A \rvert = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & a \\ 0 & a & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 9 - a^2) \ .$$ 由于二次型通过正交变换化为标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$，所以 A 得特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$，将 $\lambda_1 = 1$ 代入 A 得特征多项式，应有 $$(1-2)(1^2 - 6\times 1 + 9 - a^2) = 0$$ 解得 $a = \pm 2$. 因为 $a > 0$. 所以 $a = 2$. 对于 $\lambda_1 = 1$，解齐次线性方程组 $(E - A)x = 0$，得对应的特征向量 $\alpha_1 = (0,1,-1)^T$. 对于 $\lambda_2 = 2$，解齐次线性方程组 $(2E - A)x = 0$，得对应的特征向量 $\alpha_2 = (1,0,0)^T$. 对于 $\lambda_3 = 5$，解齐次线性方程组 $(5E - A)x = 0$，得对应的特征向量 $\alpha_3 = (0,1,1)^T$. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 已是正交向量组. 只需单位化. 令 $$\beta_1 = \frac{1}{\lVert \alpha_1 \rVert}\alpha_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,$$ $$\beta_2 = \frac{1}{\lVert \alpha_2 \rVert}\alpha_2 = (1,0,0)^T \ ,$$ $$\beta_3 = \frac{1}{\lVert \alpha_3 \rVert}\alpha_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,$$ 记

教学流程	$$Q=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$ 则 Q 为所用的正交变换 $x=Qy$ 的矩阵. **定理 4** 二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 的标准形中，系数不为零的平方项个数等于该二次型的矩阵的秩. **证**：设二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 的矩阵为 A，经过非退化的线性变换 $x=Cy$ 化为标准形，即 $$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx=y^T\left(C^TAC\right)y$$ $$=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2$$ 其中 $d_i\neq 0,\left(i=1,2,\cdots,r\right)$. 显然 $r=R\left(C^TAC\right)$, 又由于 C 可逆，所以 $r=R\left(C^TAC\right)=R\left(A\right)$. 从定理 4 可见，二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx$ 的标准形中不为零的平方项个数就是 $R\left(A\right)$，而与所做的非退化线性变换无关，是二次型自身所固有的一个特性。根据这个结果，我们将二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx$ 的矩阵 A 的秩称为二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 的秩. 设二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 的秩为 r，则经过适当的非退化线性变换可将其化为标准形. 在标准形中不为零的 r 个平方项系数可正可负，再适当排列向量的次序可得到 $$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p-1}y_{p-1}^2-\cdots-d_ry_r^2$$ 其中 $d_i>0,\left(i=1,2,\cdots,r\right)$ 经过下列非退化线性变换

教学流程	$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{d_2}} z_2 \\ \quad \vdots \\ y_r = \frac{1}{\sqrt{d_r}} z_r \\ y_{r+1} = z_{r+1} \\ \quad \vdots \\ y_n = z_n \end{cases}$$ 可得 $$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p-1}^2 - \cdots - z_r^2$$ 称该式为二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的规范形. **定理 5**（惯性定理） 任意一个秩为 r 的二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 均可化为规范形，且无论用何种非退化的线性变换得到的规范形是唯一的.（证明略） 有惯性定理可知，任意秩为 r 的 n 阶对称矩阵 A，均存在 n 阶可逆矩阵 C，使得 $C^T AC = \begin{pmatrix} E_p & 0 & 0 \\ 0 & -E_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$， 其中 p 是由 A 唯一确定的. **定义 1** 在秩为 r 的二次型的标准形或规范形中，正平方项的个数 p 称为正惯性指数，负平方项的个数 $r-p$ 称为负惯性指数. **定义 2** 实对称矩阵 A 可看做二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax$ 的矩阵，此时将二次型的正（负）惯性指数称为 A 的正（负）惯性指数. 利用惯性定理可得出实对称矩阵合同的判断法. **定理 6** A, B 均为 n 阶对称矩阵，则 A 与 B 在实数域上合同的充分必要条件是 A, B 有相同的秩和相同的正惯性指数.（证明略） **（思政：矩阵进行合同变换，正负惯性指数不变，这就是所谓的“形变质不变”的辩证思想）** **知识点巩固：** **例 5** 设 $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

教学流程	$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$， $D=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$， 则与 A 合同矩阵为______________. 解　注意到 $R(A)=3$，A 的正惯性指数为 2，而 $R(B)=R(C)=3, R(D)=2$， 所以 A 与 D 不合同. 矩阵 B 可看作二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+2x_3^2=(x_1-x_2)^2+x_2^2+2x_3^2$ 的 矩阵，所以 B 的正惯性指数为 3，据此 A与B 不合同. 矩阵 C 可看作二次型的矩阵，所以 C 的正惯性指数为 2，据此 A 与 C 合同. 这样本例应填 C. 由 $\lvert\lambda E-B\rvert=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&0\\1&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\left(\lambda-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ 知，B 的特征值为 $2,\frac{3+\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 均为正数. 故 B 的秩为 3，从而 A与B 不合同. 由 $\lvert\lambda E-C\rvert=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\1&\lambda-1&-1\\0&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})$ 知，C 的特征值为$1,\sqrt{2},-\sqrt{2}$，故C 的秩为 3，正惯性指数为 2，从而 A 与 C 合同. **（思政：研究二次型的标准型，需要把二次型化为标准型，无论是正交变换法还是配方法的化简过程，都是复杂的，但是最后化简出来的标准形式，简洁规整的。揭示了化归的唯物辩证唯物主义思想。复杂的内容简化处理，把一个问题由难化易，由繁化简，复杂的简单化，化未知为已知。）** **课堂评测：** **习题六：1，2，5，6**

教学流程	**内容小结：** 1. 对于任意一个二次型，总可以通过变换，使其写成对称式，并对应于矩阵 A. 2. 设 A, B 为两个 n 阶矩阵，如果存在 n 阶非奇异矩阵 C，使得 $$C^T AC = B$$ 则称矩阵 A 合同于矩阵 B, 或 A 与 B 合同，记为 $A \simeq B$. 3. 用配方法化二次型为标准形, 用正交变换法化二次型为标准形.
教　学 后　记	1.矩阵的合同和相似要区分，避免混淆。 2.正交变换法需要熟练掌握求特征向量和正交化的方法，需要加强练习。

章节（单元）教案

<table>
<tr><td>要　素</td><td colspan="4">二次型　　　**内　容**　二次型与对称矩阵的正定性</td></tr>
<tr><td>章节名称</td><td colspan="2">§6.3 二次型与对称矩阵的正定性</td><td>教学时数</td><td>2</td></tr>
<tr><td>单元内容</td><td>1.基本概念
2.正定二次型的判定
3.正定矩阵的性质</td><td>时间</td><td colspan="2">年　月　日　第　节</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：了解二次型正定的基本概念和性质，掌握正定的充要条件。
能力目标：掌握正定二次型的判定方法。
思政目标：培养学生严谨科学的态度，培养学生变化中保持不变的辩证统一思想。</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="4">重点：掌握正定二次型的判定方法。
难点：掌握正定二次型的判定方法。</td></tr>
<tr><td>教学要求</td><td colspan="4">教师课前充分备课，了解学情；学生需要具备矩阵的相关计算能力。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">课堂讲授、启发式教学、案例教学等</td></tr>
<tr><td>授课方式</td><td colspan="4">线上线下混合式教学</td></tr>
<tr><td>练　习
作　业</td><td colspan="4">作业：习题六 7，13</td></tr>
<tr><td>参　考
资　料</td><td colspan="4">1.吴赣昌. 线性代数. 北京：中国人民大学出版社.2006
2.吴传生. 经济数学线性代数（第二版）. 北京：高等教育出版社.2009
3.同济大学数学系. 工程数学：线性代数（第六版）.北京：高等教育出版社. 2014</td></tr>
</table>

章节（单元）教案

<table>
<tr>
<td>教学流程</td>
<td>

导入

根据二次型的标准型，将二次型进行分类，在理论上具有重要意义，在工程技术和最优化等问题中，有广泛应用，其中最常用的是二次型的标准型系数全为正或为负的情形。

新课讲授

定义 1 具有对称矩阵 A 的二次型

$$f(x)=x^{T}Ax$$

如果对于任何 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{T}\neq 0$，都有

$$x^{T}Ax>0 \qquad (或<0)$$

成立，则称 $f(x)=x^{T}Ax$ 为正定（负定）二次型，矩阵 A 称为正定矩阵（负定矩阵）.

如果对于任何 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{T}$，都有

$$x^{T}Ax\geq 0 \qquad (或\leq 0)$$

且有 $x_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)^{T}\neq 0$，使 $x_0^{T}Ax_0=0$，则称二次型 $f(x)=x^{T}Ax$ 为半正定（半负定）二次型，矩阵 A 称为半正定（半负定）矩阵.

例 1 二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

当 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{T}\neq 0$ 时，显然 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$，所以这个二次型是正定的，其矩阵 I_n 是正定矩阵.

例 2 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-2x_1x_2+4x_1x_3-x_2^2+4x_2x_3-4x_3^2$$

可写成 $f(x_1,x_2,x_3)=-(x_1+x_2-2x_3)^2\leq 0$，当 $x_1+x_2-2x_3=0$ 时，$f(x_1,x_2,x_3)=0$，因此 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是半负定二次型，其对应的矩阵 $\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&-1&2\\2&2&-4\end{pmatrix}$ 是半负定矩阵.

</td>
</tr>
</table>

教学流程	**例 3** $f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_2^2$ 是不定二次型，因为其符号有时正有时负，例如，$f(1,1)=-1<0, f(2,1)=2>0$. **定理 1** 设 A 为正定矩阵，如果 $A\simeq B$，则 B 也是正定矩阵. **证**：由 $A\simeq B$ 可知，存在非奇异矩阵 C，使 $C^TAC=B$，令 $x=Cy,\lvert C\rvert\neq 0$，对于任意 $y\neq 0$ 均有 $x\neq 0$，因此， $y^TBy=y^TC^TACy=(Cy)^TA(Cy)=x^TAx>0$（因 A 为正定矩阵），即 B 为正定矩阵. **定理 2** 对角矩阵 $D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ 为正定矩阵的充分必要条件是：$d_i>0,(i=1,2,\cdots,r)$. **证**：必要性 D 为正定矩阵，即对任何 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$ 都有 $x^TDx=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2>0$，取 $x=\varepsilon_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$ $(i=1,2,\cdots,n)$，有 $\varepsilon_i^TD\varepsilon_i=d_i>0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$. 充分性 对于任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，至少有 $x_k\neq 0$，因为 $d_k>0,x_k\neq 0$，故 $d_kx_k^2>0$. 当 $i\neq k$ 时，$d_ix_i^2\geq 0$，所以 $x^TDx=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_kx_k^2+\cdots+d_nx_n^2>0$， 所以 D 为正定矩阵. 因为 $A^T=A$，则有 $A\simeq\begin{pmatrix} E_p & 0 & 0 \\ 0 & -E_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，由定理 1 及定理 2 可知，若 A 为正定矩阵，则正惯性指标 $p=n$，即 $A\simeq E$.反之，若 $A\simeq E$，则 A 为正定，即存在非奇异矩阵 C，使 $A=C^TEC=C^TC$ 此时，$\lvert A\rvert=\lvert C\rvert^2>0$. 于是又下面定理：

教学流程	**定理 3** 矩阵 A 为正定矩阵的充分必要条件是存在非奇异矩阵 C，使得 $A=C^TC$，即 A 合同于单位矩阵.

推论 1 矩阵 A 为正定矩阵的充分必要条件是 A 的正惯性指标 $p=n$.

推论 2 如果 A 为正定矩阵，则 $\left|A\right|>0$.

定理 4 对称矩阵 A 为正定矩阵的充分必要条件是 A 的所有特征值都是正数.

证：对称矩阵 A 对应的二次型为

$$f(x)=x^TAx$$

根据第五章第三节定理 8，必存在正交矩阵 Q，经过正交变换二次型 f 可以化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 是 A 的所有特征值，根据定理 2，二次型 x^TAx 为正定二次型的充分必要条件是 $\lambda_i>0,(i=1,2,\cdots,n)$，即 A 的所有特征值为正数。

定义 2 设 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A 的子式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix} \quad 1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$$

称为 A 的 k 阶主子式. 而子式

$$A_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

称为 A 的 k 阶顺序主子式，即

$$\left|A_1\right|=a_{11}\ ,\ \left|A_2\right|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\ ,\left|A_3\right|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\cdots,\left|A_n\right|=\left|A\right|$$

教学流程	例如，$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 的顺序主子式为 $\|A_1\|=1$ ，$\|A_2\|=\begin{vmatrix}1&2\\2&0\end{vmatrix}=-4$，$\|A_3\|=\|A\|=-8$ **定理 5** 矩阵 $A=(a_{ij})n\times n$ 为正定矩阵的充分必要条件是 A 的所有顺序主子式都大于零，即 $\|A_k\|>0 \quad (k=1,2,\cdots,n)$. **推论**：如果 A 是负定矩阵，则 $-A$ 为正定矩阵. 因此 A 为负定矩阵的充分必要条件是： $$(-1)^k\|A_k\|>0 \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$ **（思政：二次型化为标准型，对二次型做各种变化，正定性保持不变，变化中保持不变的辩证统一思想。）** **知识点巩固** **例 4** 判别二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=6x_1^2-4x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+7x_3^2$ 是否正定. **解法一** 由定义将二次型化为标准形 $$f(x_1,x_2,x_3)=6x_1^2-4x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+7x_3^2$$ $$=6\left(x_1-\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\right)^2+\frac{13}{3}\left(x_2+\frac{2}{13}x_3\right)^2+\frac{243}{39}x_3^2$$ 故该二次型正定. **解法二** 特征值法： 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=6x_1^2-4x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+7$ 对应的矩阵为 $$A=\begin{pmatrix}6&-2&2\\-2&5&0\\2&0&7\end{pmatrix},$$

教学流程	$$\lvert \lambda E - A\rvert = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-5 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-7 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9)$$ A 的特征值非别为 3、6、9 都是正数，故该二次型正定. **解法三** 顺序主子式法： $$\lvert A_1\rvert = 6 > 0 \ ,\quad \lvert A_2\rvert = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 26 > 0,$$ $$\lvert A_3\rvert = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 162 > 0$$ 所以二次型为正定. 例 5 判断二次型 $f(x,y,z)$ 为负定 $$f(x,y,z) = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$$ **解** 二次型 $f(x,y,z)$ 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, 顺序主子式分别为： $$\lvert A_1\rvert = -5 < 0 \ ,\quad \lvert A_2\rvert = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0,$$ $$\lvert A_3\rvert = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -80 < 0$$ 由定理 5 的推论知二次型 $f(x,y,z)$ 是负定的. 例 6 当 λ 取何值时，二次型

教学流程	$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3+x_4^2$$ 是正定的，并讨论 $\lambda\le 2$ 的情况. **解** 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & \lambda & -1 & 0\\ 1 & -1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 由 f 正定的充要条件是 A 正定，而 A 正定得充要条件是 A 的各阶顺序主子式全大于零. A 的各阶顺序主子式为： $$\lvert A_1\rvert=\lambda>0 \quad , \quad \lvert A_2\rvert=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1>0,$$ $$\lvert A_3\rvert=\lvert A_4\rvert=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-2)>0$$ 所以，当 $\lambda>2$ 时，A 的各阶顺序主子式全大于零，此时 A 正定，因而二次型 f 是正定的. 当 $\lambda=2$ 时，A 的各阶顺序主子式非负，此时 f 为半正定. 当 $\lambda<2$ 时，A 的各阶顺序主子式符号不确定，此时 f 是不定的. 例 6 试证：如果 A 为正定矩阵，则 A^{-1} 也是正定矩阵. **证明** A 为正定矩阵，故存在非奇异矩阵 C，使 $A=C^TC$，即 $E=C^TAC$，两边取逆 $$E=C^TAC=C^{-1}A^{-1}(C^T)^{-1}=((C^{-1})^T)^TA^{-1}(C^{-1})^T$$ 所以 A^{-1} 与 E 合同，故 A^{-1} 也是正定矩阵.

教学流程	例 7设 A 是 n 阶实对称矩阵，且 $A^2=E$，试证：存在正交矩阵 T，使 $$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_{n-p} \end{pmatrix}$$ 其中，p 是 A 所对应二次型的正惯性指数. **证明** 由题设 $A=A^T$ 且 $A^2=E$，故 $A^TA=E$，A 为对称的正交矩阵. 设 α 是 A 对应于特征值 λ 的特征向量，则 $$A^2\alpha=A(A\alpha)=A(\lambda\alpha)=\lambda^2\alpha=I\alpha=\alpha$$ 于是，$\lambda^2=1,\lambda^2=\pm1$， 设 $\lambda=1$ 作为 $\|\lambda E-A\|=0$ 的重根的重数为 p，则 A 所对应的二次型的正惯性指数 p，且存在正交矩阵 T，使 $$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_{n-p} \end{pmatrix}.$$ **课堂评测：** **习题六：7，13** **内容小结：** 1. 对角矩阵为正定矩阵的充分必要条件是：$d_i>0,(i=1,2,\cdots,r)$. 2. 矩阵 A 为正定矩阵的充分必要条件是 （1）存在非奇异矩阵 C，使得 $A=C^TC$，即 A 合同于单位矩阵. （2） A 的正惯性指标 $p=n$. （3） A 的所有特征值都是正数.

	（4）是 A 的所有顺序主子式都大于零，即 $\lvert A_k \rvert > 0 \quad (k = 1,2,\cdots,n)$. 3. 如果 A 为正定矩阵，则 $\lvert A \rvert > 0$.
教　学 后　记	1.牢记哪些是充要统计，哪些是充分条件，不能混淆。 2.正定矩阵的充要条件很多，要找到合适的判定方法。