高等代数建模案例汇编

晋中学院数学系

2021年5月

目　录

前　言

高等代数是数学与应用数学专业的一门重要的基础课，它对学生思维能力、逻辑推理能力和运算能力的培养，以及后续课程的学习起着非常重要的作用。但是这门课程比较抽象，概念多，理论证明比较麻烦，对刚上大学的学生来说很难接受。学生普遍反映高等代数难学无用，针对多年的教学实践，我们在教学中针对不同的内容设计一些教学实例，力求接近生活实际又能体现代数的作用，让学生体会到，其实高等代数与我们的生活密切相关，可以为我们解决实际中的许多问题。在学习高等代数的过程中，大家会发现代数在生活和实践中都有不可缺少的位置。通过具体应用的实例教学，学生接受知识更快，并且有了主动探究问题实质的动力和兴趣，对于枯燥定理的学习也有了更深层次的理解。

在项目实施与开展的过程中，结合教学与实践，项目组成员共同努力下，收集了二十多个容易理解的案例.此项工作仍然在继续而且会一直继续下去，并将其推广到其他数学课程的教学中去，通过实践教学，为适应社会需求，培养应用型人才奠定一些必备的基础，尽我们的微博之力。一些案例已经逐步融入课堂教学中，通过案例的引入，大大提高了学生学习高等代数课程的兴趣，激发了学生求知的欲望，也是与传统教学相比之下，教学创新的一大亮点，很受师生欢迎，当然这些案例和各类数学建模竞赛的题目相比，确实显得简单. 但对于初次学习高等代数或线性代数的学生来说，如果学生能通过这些案例加深对高等代数以及线性代数基本概念、理论和方法的理解，培养数学建模的意识,大胆进行创新创业项目的申报与开展，那么我们教改项目《将数学建模融入高等代数教学及推动数学教学改革》的初步的目的也就基本达到了。

近几年来全国已开始了按这种方向和思路的数学教学尝试，特别是借助于计算机及数学软件技术的数学建模教学与竞赛活动深受广大学生、教师和社会的欢迎，也说明了把数学建模的思想和方法融入数学教学确实是一种行之有效的素质教育方法。

案例一“活用”行列式定义

某市打算在第“十一”五年规划对三座污水处理厂进行技术改造，以达到国家标准要求。该市让中标的三个公司对每座污水处理厂技术改造费用进行报价承包，见下列表格(以 1 万元人民币为单位). 在这期间每个公司只能对一座污水处理厂进行技术改造，因此该市必须把三座污水处理厂指派给不同公司，为了使报价的总和最小，应指定哪个公司承包哪一座污水处理厂?

设这个问题的效率矩阵为，

$$D=\begin{bmatrix} 19 & 24 & 16 \\ 17 & 20 & 15 \\ 19 & 21 & 17 \end{bmatrix}$$

根据题目要求，相当于从效率矩阵中选取来自不同行不同列的三个元素“和”中的最小者!从行列式定义知道，这样的三个元素之共有 31=6(项)，如下：

$$D_1=\begin{bmatrix} \boxed{19} & 24 & 16 \\ 17 & \boxed{20} & 15 \\ 19 & 21 & \boxed{17} \end{bmatrix} \quad D_2=\begin{bmatrix} \boxed{19} & 24 & 16 \\ 17 & 20 & \boxed{15} \\ 19 & \boxed{21} & 17 \end{bmatrix} \quad D_3=\begin{bmatrix} 19 & \boxed{24} & 16 \\ \boxed{17} & 20 & 15 \\ 19 & 21 & \boxed{17} \end{bmatrix}$$

①19+20+17=56　②19+15_21=55　③24+17+17=58

$$D_4=\begin{bmatrix} 19 & 24 & \boxed{16} \\ \boxed{17} & 20 & 15 \\ 19 & \boxed{21} & 17 \end{bmatrix} \quad D_5=\begin{bmatrix} 19 & \boxed{24} & 16 \\ 17 & 20 & \boxed{15} \\ \boxed{19} & 21 & 17 \end{bmatrix} \quad D_6=\begin{bmatrix} 19 & 24 & \boxed{16} \\ 17 & \boxed{20} & 15 \\ \boxed{19} & 21 & 17 \end{bmatrix}$$

④16+17+21=54　⑤24+15+19=58　⑥15+20+19=55

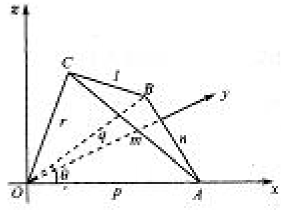
由上面分析可见报价数的范围是从最小值 54 万元到最大值 58 万元。由④得到最小报价总数 54 万元，因此，该城市

应选定④即

公司Ⅰ	污水处理厂 C
公司Ⅱ	污水处理厂 A
公司Ⅲ	污水处理厂 B

案例二　Euler 的四面体问题

问题　如何用四面体的六条棱长去表示它的体积？这个问题是由 Euler（欧拉）提出的.



解　建立如图 2.1 所示坐标系，设 A，B，C 三点的坐标分别为 (a_1, b_1, c_1)，(a_2, b_2, c_2) 和 (a_3, b_3, c_3)，并设四面体 O-ABC 的六条棱长分别为 l, m, n, p, q, r. 由立体几何知道，该四面体的体积 V 等于以向量 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ 组成右手系时，以它们为棱的平行六面体的体积 V_6 的 $\frac{1}{6}$. 而

$$V_6 = \left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right) \cdot \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

于是得　　$6V = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. 将上式平方，得

$$36V^2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 & a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 & a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_2 c_3 & a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix}.$$

根据向量的数量积的坐标表示，有

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2,\quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2,$$
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3,\quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$$
$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3,\quad \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2.$$

于是

$$36V^2=\begin{vmatrix}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} & \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} & \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}\end{vmatrix}. \qquad (2.1)$$

由余弦定理，可行

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=p\cdot q\cdot\cos\theta=\frac{p^2+q^2-n^2}{2}. \qquad 同理$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{p^2+r^2-m^2}{2}, \quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{q^2+r^2-l^2}{2}.$$

将以上各式代入（2.1）式，得

$$36V^2=\begin{vmatrix} p^2 & \frac{p^2+q^2-n^2}{2} & \frac{p^2+r^2-m^2}{2}\\ \frac{p^2+q^2-n^2}{2} & p^2 & \frac{p^2+r^2-l^2}{2}\\ \frac{p^2+r^2-m^2}{2} & \frac{p^2+r^2-l^2}{2} & r^2\end{vmatrix}. \qquad (2.2)$$

这就是 Euler 的四面体体积公式.

应用 ：一块形状为四面体的花岗岩巨石，量得六条棱长分别为

l=10m, m=15m, n=12m,

p=14m, q=13m, r=11m.

则

$$\frac{p2+q2-n2}{2}=110.5, \quad \frac{p2+r2-m2}{2}=46, \quad \frac{p2+r2-l2}{2}=95.$$

代入（2.1）式，得

$$36V2=\begin{vmatrix}196 & 110.5 & 46\\ 110.5 & 169 & 95\\ 46 & 95 & 121\end{vmatrix}=1369829.75.$$

于是

$$V2\approx 38050.82639\approx(195m^3)^2.$$

即花岗岩巨石的体积约为 195m^3。古埃及的金字塔形状为四面体，因而可通过测量其六条棱长去计算金字塔的体积。

案例三　赢得矩阵

田忌和齐王赛马的故事，学生在语文课本中都学过，最后田忌以两胜一负赢得这场比赛．双方约定出上、中、下 3 个等级的马各一匹进行比赛，这样共赛马 3 次．已知在同一等级马的比赛中，齐王之马可稳操胜券．齐王及田忌在排列赛马出场顺序时，各取下列 6 种策略（方案）之一：

(上，中，下)、(上，下，中)、(中，上，下)、

(中，下，上)、(下，中，上)、(下，上，中)

每一场比赛中齐王赢加一分，齐王输减一分，共比赛三场．若将这 6 种策略依次从 1 到 6 编号，则可写出齐王的赢得矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

其中，行代表齐王策略，列代表田忌策略．比如，$a_{16}=-1$，说明齐王采用策略 6，即下、上、中顺序出马，而田忌采用策略 1，即上、中、下顺序出马．这样我们从这个赢得矩阵里就很清晰地看出双方马的出场顺序和比赛结果．

实践题：逻辑判断问题

甲、乙、丙、丁四人各从图书馆借来一本小说，他们约定读完后互相交换，这四本书的厚度以及他们四人的阅读速度差不多，因此，四人总是同时交换书，经三次交换后，他们四人读完了这四本书，现已知：

（1）乙读的最后一本书是甲读的第二本书；

（2）丙读的第一本书是丁读的最后一本书。

问四人的阅读顺序是怎样的？

（**提示：**设甲、乙、丙、丁最后读的书的代号依次为 A,B,C,D,则根据题设条件可以列出初始矩阵

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 甲 & 乙 & 丙 & 丁 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} & & D & \\ B & & & \\ & & & \\ A & B & C & D \end{pmatrix} \end{array}$$

然后来分析矩阵中各位置的书名代号）。

案例四　矩阵的乘积在有向图问题的应用

如图 1 是有四个顶点八条弧的有向图，它可表示某航空公司可在四个城市间的运行图，这里顶点看做城市，城市 i 到 j 有航班，则 i 到 j 有一条弧，否则就没有弧，它也可以表示某物资在四个城市]的转移路线图。

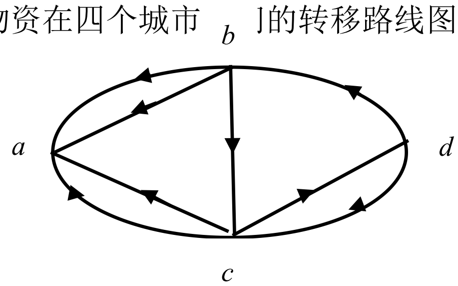


图 1

原理：建立一个 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，如果 i 到 j 有一条弧，则 a_{ij} =1；否则，a_{ij} =0。它反映了图中顶点之间的相邻关系，称其为（顶点）邻接矩阵，则图 1 的邻接矩阵

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ A=\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

问题：设某航空公司在四个城市间的航行运行图如图 1，若某记者从城市 d 出发，有几条经三次航行到达城市 c 的路线；有几条经 4 次航行回到城市 d 的路线？

分析：考察图 1 的邻接矩阵的幂 $A^2=(a_{ij}^{(2)})$：其中 $a_{ij}^{(2)}$ 的值表示从城市 i 到 j 经过两次航行到达 j 的线路数，若记 $A^k=(a_{ij}^{(k)})$，则 $a_{ij}^{(k)}$ 的值表示从城市 i 到 j 经过两次航行到达 j 的线路数。通过计算可得：

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ A^4=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

于是从城市 d 出发经三次航行到达城市 c 的路线数 $a_{43}^{(3)}$=3 条，具体为：

$$d \to c \to d \to c; d \to b \to a \to c; d \to c \to a \to c;$$

而从 d 出发经 4 次航行回到城市 d 的路线数 $a_{44}^{(4)}$=3，具体为：

$$d \to c \to d \to c \to d; d \to b \to a \to c \to d; d \to c \to a \to c \to d.$$

实践题

1　有一个心理学家做了如下的老鼠实验：于前次的实验中，走向右边的老鼠中，有 80%在下次实验中仍走向右边；走向右边的老鼠中，有 60%在下次实验中走向右边。（1）试求其转移矩阵；（2）如果在第一次实验中有 50%的老鼠走向右边，试求在第三次实验，有多少老鼠走向右边？

2　假设有一家租车公司有三个门市，顾客可以从其中任一门市租车而在任一门市还车，如果 P=$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$，其中 P_{ij} 表示从 j 门市租的车在 i 门市还的概率，则 P_{12}=0.2 表示的是多少？

案例五．交通网络流量分析问题

城市道路网中每条道路、每个交叉路口的车流量调查，是分析、评价及改善城市交通状况的基础。根据实际车流量信息可以设计流量控制方案，必要时设置单行线，以免大量车辆长时间拥堵。

图 2 某地交通实况

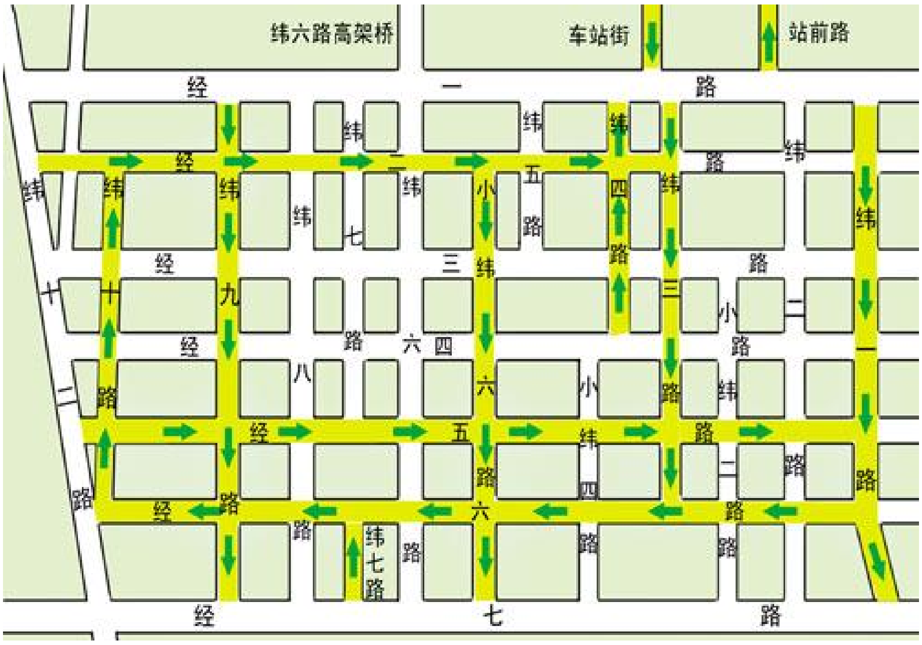


图 3 某城市单行线示意图

【模型准备】 某城市单行线如下图所示，其中的数字表示该路段每小时按箭头方向行驶的车流量(单位：辆).

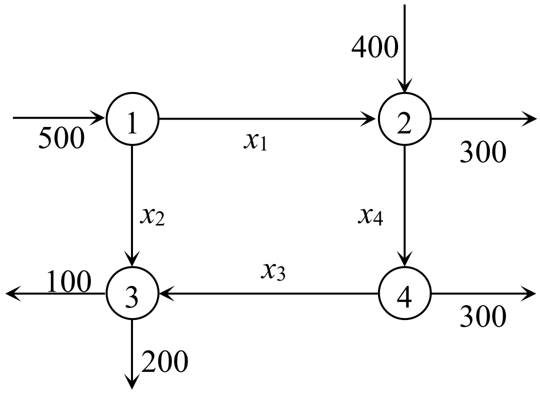


图 4 某城市单行线车流量

(1) 建立确定每条道路流量的线性方程组.

(2) 为了唯一确定未知流量, 还需要增添哪几条道路的流量统计?

(3) 当 $x_4 = 350$ 时, 确定 x_1, x_2, x_3 的值.

(4) 若 $x_4 = 200$, 则单行线应该如何改动才合理?

【模型假设】 (1) 每条道路都是单行线. (2) 每个交叉路口进入和离开的车辆数目相等.

【模型建立】 根据图 3 和上述假设, 在①, ②, ③, ④四个路口进出车辆数目分别满足

$$500 = x_1 + x_2 \qquad ①$$

$$400 + x_1 = x_4 + 300 \qquad ②$$

$$x_2 + x_3 = 100 + 200 \qquad ③$$

$$x_4 = x_3 + 300 \qquad ④$$

【模型求解】根据上述等式可得如下线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 500 \\ x_1 - x_4 = -100 \\ x_2 + x_3 = 300 \\ -x_3 + x_4 = 300 \end{cases}$$

其增广矩阵

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 300 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -100 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可得

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = -100 \\ x_2 + x_4 = 600 \\ x_3 - x_4 = -300 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = x_4 - 100 \\ x_2 = -x_4 + 600 \\ x_3 = x_4 - 300 \end{cases}.$$

为了唯一确定未知流量，只要增添 x_4 统计的值即可.

当 $x_4 = 350$ 时，确定 $x_1 = 250, x_2 = 250, x_3 = 50$.

若 $x_4 = 200$，则 $x_1 = 100, x_2 = 400, x_3 = -100 < 0$. 这表明单行线“③←④”应该改为“③→④”才合理.

【模型分析】(1) 由$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$的行最简形可见，上述方程组中的最后一个方程是多余的. 这意味着最后一个方程中的数据“300”可以不用统计.

(2) 由 $\begin{cases} x_1 = x_4 - 100 \\ x_2 = -x_4 + 600 \\ x_3 = x_4 - 300 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x_2 = -x_1 + 500 \\ x_3 = x_1 - 200 \\ x_4 = x_1 + 100 \end{cases}$ ，$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 500 \\ x_3 = -x_2 + 300 \\ x_4 = -x_2 + 600 \end{cases}$，$\begin{cases} x_1 = x_3 + 200 \\ x_2 = -x_3 + 300 \\ x_4 = x_3 + 300 \end{cases}$，这就是说 x_1, x_2, x_3, x_4 这四个未知量中，任意一个未知量的值统计出来之后都可以确定出其他三个未知量的值.

参考文献

陈怀琛，高淑萍，杨威，工程线性代数，北京：电子工业出版社，2007. 页码：16-17.

实践题

某城市有下图所示的交通图，每条道路都是单行线，需要调查每条道路每小时的车流量. 图中的数字表示该条路段的车流数. 如果每个交叉路口进入和离开的车数相等，整个图中进入和离开的车数相等.

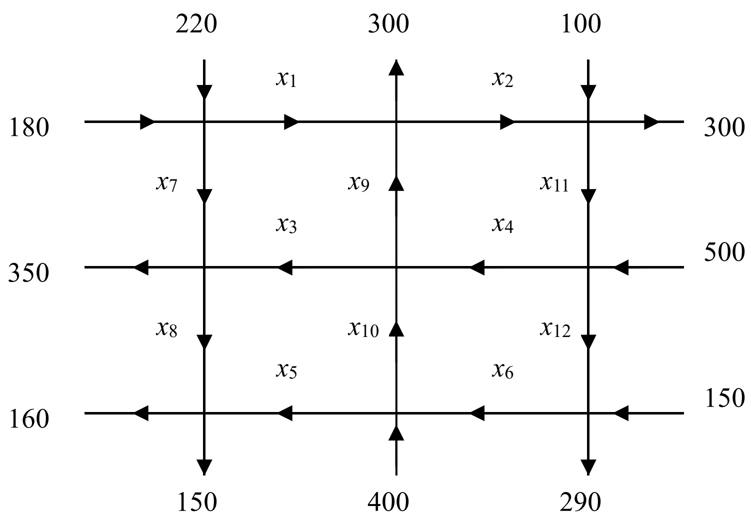


图 5 某城市单行线车流量

(1)建立确定每条道路流量的线性方程组.

(2)分析哪些流量数据是多余的.

(3)为了唯一确定未知流量, 需要增添哪几条道路的流量统计.

案例六. 配方问题

在化工、医药、日常膳食等方面都经常涉及到配方问题. 在不考虑各种成分之间可能发生某些化学反应时, 配方问题可以用向量和线性方程组来建模.

图 6 日常膳食搭配

图 7 几种常见的作料

【模型准备】一种佐料由四种原料 A、B、C、D 混合而成. 这种佐料现有两种规格, 这两种规格的佐料中, 四种原料的比例分别为 2:3:1:1 和 1:2:1:2. 现在需要四种原料的比例为 4:7:3:5 的第三种规格的佐料. 问: 第三种规格的佐料能否由前两种规格的佐料按一定比例配制而成?

【模型假设】 (1) 假设四种原料混合在一起时不发生化学变化. (2) 假设四种原料的比例是按重量计算的. (3) 假设前两种规格的佐料分装成袋, 比如说第一种规格的佐料每袋净重 7 克(其中 A、B、C、D 四种原料分别为 2 克, 3 克, 1 克, 1 克), 第二种规格的佐料每袋净重 6 克(其中 A、B、C、D 四种原料分别为 1 克, 2 克, 1 克, 2 克).

【模型建立】 根据已知数据和上述假设, 可以进一步假设将 x 袋第一种规格的佐料与 y 袋第二种规格的佐料混合在一起, 得到的混合物中 A、B、C、D 四种原料分别为 4 克, 7 克, 3 克, 5 克, 则有以下线性方程组

$$\begin{cases} 2x+y=4, \\ 3x+2y=7, \\ x+y=3, \\ x+2y=5. \end{cases}$$

【模型求解】上述线性方程组的增广矩阵

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见$\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$ 又因为第一种规格的佐料每袋净重 7 克, 第二种规格的佐料每袋净重 6 克, 所以第三种规格的佐料能由前两种规格的佐料按 7:12 的比例配制而成.

【模型分析】(1) 若令$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,3,1,1)^{\mathrm T}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1,1)^{\mathrm T}$, $\boldsymbol{\beta}=(4,7,5,3)^{\mathrm T}$, 则原问题等价于"线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是否有解", 也等价于"$\boldsymbol{\beta}$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示".

(2) 若四种原料的比例是按体积计算的, 则还要考虑混合前后体积的关系(未必是简单的叠加), 因而最好还是先根据具体情况将体积比转换为重量比, 然后再按上述方法处理.

(3) 上面的模型假设中的第三个假设只是起到简化运算的作用. 如果直接设x克第一种规格的佐料与y克第二种规格的佐料混合得第三种规格的佐料, 则有下表

表 1 混合后四种原料的含量

原料 佐料规格	A	B	C	D
第一种	$\frac{2}{7}x$	$\frac{3}{7}x$	$\frac{1}{7}x$	$\frac{1}{7}x$
第二种	$\frac{1}{6}y$	$\frac{2}{6}y$	$\frac{1}{6}y$	$\frac{2}{6}y$
第三种	$\frac{4}{19}(x+y)$	$\frac{7}{19}(x+y)$	$\frac{3}{19}(x+y)$	$\frac{5}{19}(x+y)$

因而有如下线性方程组

$$\begin{cases}\frac{2}{7}x+\frac{1}{6}y=\frac{4}{19}(x+y),\\ \frac{3}{7}x+\frac{2}{6}y=\frac{7}{19}(x+y),\\ \frac{1}{7}x+\frac{1}{6}y=\frac{3}{19}(x+y),\\ \frac{1}{7}x+\frac{2}{6}y=\frac{5}{19}(x+y).\end{cases}\qquad (*)$$

【模型检验】把$x=7$, $y=12$代入上述方程组(*), 则各等式都成立. 可见模型假设中的第三个假设不影响解的正确性.

<u>实践题</u>

蛋白质、碳水化合物和脂肪是人体每日必须的三种营养, 但过量的脂肪摄入不利于健康. 人们可以通过适量的运动来消耗多余的脂肪. 设三种食物(脱脂牛奶、大豆面粉、乳清)每 100 克中蛋白质、碳水化合物和脂肪的含量以及慢跑 5 分钟消耗蛋白质、碳水化合物和脂肪的量

如下表.

表 2 三种食物的营养成分和慢跑的消耗情况

营养	每 100 克食物所含营养(克)			慢跑 5 分钟消耗量(克)	每日需要的营养量(克)
	牛奶	大豆面粉	乳清		
蛋白质	36	51	13	10	33
碳水化合物	52	34	74	20	45
脂肪	10	7	1	15	3

问怎样安排饮食和运动才能实现每日的营养需求?

案例七 利用向量组的线性相关性求根式方程的解

问题： 求 $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2+x+5}=\sqrt{x^2-3x+13}$ 的实数解.

分析： 我们注意到 $x^2+x+1, 2x^2+x+5$，$x^2-3x+13$ 满足：

$$-7\left(x^2+x+1\right)+4\left(2x^2+x+5\right)=x^2-3x+13 \quad (1)$$

由性质 1 可知 $x^2+x+1, 2x^2+x+5$，$x^2-3x+13$ 线性相关，现在令：

$\mathrm{u}=\sqrt{x^2+x+1}$，$\mathrm{v}=\sqrt{2x^2+x+5}$，$\mathrm{w}=\sqrt{x^2-3x+13}$，则有：

$$\mathrm{u}+\mathrm{v}=\mathrm{w} \quad (2)$$

由（1）可见

即：

$$-7\mathrm{u}^2+4\mathrm{v}^2=\mathrm{w}^2 \quad (3)$$

将（2）带入（3）得：$-7\mathrm{u}^2+4\mathrm{v}^2=(\mathrm{u}+\mathrm{v})^2$，对该式化简并整理得：

$$(\mathrm{v}-2\mathrm{u})(3\mathrm{v}+4\mathrm{u})=0 \quad (4)$$

又当 x 为实数时，x^2+x+1 与 $2x^2+x+5$ 也都是实数，且 $3\mathrm{v}+4\mathrm{u}>0$,所以仅当 $\mathrm{v}-2\mathrm{u}=0$ 时，（4）才成立，即：$\sqrt{x^2+x+1}=2\sqrt{2x^2+x+5}$，对该式两边平方并整理得：$2x^2+3x-1=0$，解得：$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$，经检验它是原方程的解.故得原方程的全部实数解为 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$.

本题将 $x^2+x+1, 2x^2+x+5$，$x^2-3x+13$ 作为向量，有效利用它们之间的线性相关性，简化了解题步骤，避免了常规运算的繁琐性.

案例八 利用向量组的线性相关性求不定积分

问题： 求不定积分 $I=\int\frac{A\cos x+B\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x$ （其中 $a^2+b^2\neq 0$）

分析：先考虑两种特殊情况：

① 当 $(A,B)=(a,b)$ 时，显然原式 $I_1=x+C_1$,其中 C_1 为积分常数；

② 当 $(A,B)=(b,-a)$ 时，易知原式 $I_2=\ln|a\cos x+b\sin x|+C_2$,其中 C_2 为积分常数.

以下考虑一般情况，此时则可利用向量组的线性相关性和以上两种特殊情况计算出原积分：

注意到 $a^2+b^2\neq 0$，所以 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$ 线性无关，从而由性质 2、3 可设：

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}，\text{即：}\quad \begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\b & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix},$$

利用克拉默法则解该方程组得：

$$k_1=\frac{aA+bB}{a^2+b^2},k_2=\frac{bA-aB}{a^2+b^2}.$$

由于 $I=\int\frac{A\cos x+B\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{A\cos x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x+\int\frac{B\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x$

若令

$$f(x)=\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}，\quad g(x)=\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x},$$

则：

$$\int(af(x)+bg(x))\mathrm{d}x=I_1，\quad \int(bf(x)-ag(x))\mathrm{d}x=I_2,$$

从而有

$$I=\int(Af(x)+Bg(x))\mathrm{d}x=\int(f(x),g(x))\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\mathrm{d}x$$

$$=\int(f(x),g(x))\begin{pmatrix}a & b\\b & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}\mathrm{d}x$$

$$=\int(af(x)+bg(x),bf(x)-ag(x))\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}\mathrm{d}x$$

$$=k_1\int(af(x)+bg(x))\mathrm{d}x+k_2\int(bf(x)-ag(x))\mathrm{d}x$$

$$=k_1I_1+k_2I_2$$

利用向量组的线性相关性使该不定积分的计算变得简单、直观，更易于学生接受.

案例九. 投入产出问题

在研究多个经济部门之间的投入产出关系时, W. Leontief 提出了投入产出模型. 这为经济学研究提供了强有力的手段. W. Leontief 因此获得了 1973 年的 Nobel 经济学奖.

图 8 三个经济部门

这里暂时只讨论一个简单的情形.

【模型准备】某地有一座煤矿, 一个发电厂和一条铁路. 经成本核算, 每生产价值 1 元钱的煤需消耗 0.3 元的电; 为了把这 1 元钱的煤运出去需花费 0.2 元的运费; 每生产 1 元的电需 0.6 元的煤作燃料; 为了运行电厂的辅助设备需消耗本身 0.1 元的电, 还需要花费 0.1 元的运费; 作为铁路局, 每提供 1 元运费的运输需消耗 0.5 元的煤, 辅助设备要消耗 0.1 元的电. 现煤矿接到外地 6 万元煤的订货, 电厂有 10 万元电的外地需求, 问: 煤矿和电厂各生产多少才能满足需求?

【模型假设】假设不考虑价格变动等其他因素.

【模型建立】设煤矿, 电厂, 铁路分别产出 x 元, y 元, z 元刚好满足需求. 则有下表

表 3 消耗与产出情况

		产出(1 元)			产出	消耗	订单
		煤	电	运			
消耗	煤	0	0.6	0.5	x	$0.6y+0.5z$	60000
	电	0.3	0.1	0.1	y	$0.3x+0.1y+0.1z$	100000
	运	0.2	0.1	0	z	$0.2x+0.1y$	0

根据需求, 应该有

$$\begin{cases} x-(0.6y+0.5z)=60000 \\ y-(0.3x+0.1y+0.1z)=100000 \\ z-(0.2x+0.1y)=0 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} x-0.6y-0.5z=60000 \\ -0.3x+0.9y-0.1z=100000 \\ -0.2x-0.1y+z=0 \end{cases}$$

【模型求解】在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [1,-0.6,-0.5;-0.3,0.9,-0.1;-0.2,-0.1,1]; b = [60000;100000;0];
>> x = A\b
```

Matlab 执行后得

```
x =
  1.0e+005 *
    1.9966
    1.8415
    0.5835
```

可见煤矿要生产 1.9966×10^5 元的煤，电厂要生产 1.8415×10^5 元的电恰好满足需求.

【模型分析】令 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.5 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 60000 \\ 100000 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{x}$ 称为总产值列向量, $\boldsymbol{A}$ 称为消耗系数矩阵, $\boldsymbol{b}$ 称为最终产品向量，则

$$\boldsymbol{Ax}=\begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.5 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.6y+0.5z \\ 0.3x+0.1y+0.1z \\ 0.2x+0.1y \end{pmatrix}$$

根据需求，应该有 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，即$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. 故 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$.

<u>实践题</u>

1.某乡镇有甲、乙、丙三个企业. 甲企业每生产 1 元的产品要消耗 0.25 元乙企业的产品和 0.25 元丙企业的产品. 乙企业每生产 1 元的产品要消耗 0.65 元甲企业的产品, 0.05 元自产的产品和 0.05 元丙企业的产品. 丙企业每生产 1 元的产品要消耗 0.5 元甲企业的产品和 0.1 元乙企业的产品. 在一个生产周期内，甲、乙、丙三个企业生产的产品价值分别为 100 万元, 120 万元, 60 万元，同时各自的固定资产折旧分别为 20 万元, 5 万元和 5 万元.

(1) 求一个生产周期内这三个企业扣除消耗和折旧后的新创价值.

(2) 如果这三个企业接到外来订单分别为 50 万元, 60 万元, 40 万元，那么他们各生产多少才能满足需求?

2.假设你是一个建筑师，某小区要建设一栋公寓，现在有一个模块构造计划方案需要你来

设计，根据基本建筑面积每个楼层可以有三种设置户型的方案，如下表所示。如果要设计出含有 136 套一居室，74 套两居室，66 套三居室，是否可行？设计方案是否唯一？

方案	一居室（套）	两居室（套）	三居室（套）
A	8	7	3
B	8	4	4
C	9	3	5

案例十 平板的稳态温度分布问题

在热传导的研究中，一个重要的问题是确定一块平板的稳态温度分布. 根据…定律，只要测定一块矩形平板四周的温度就可以确定平板上各点的温度.

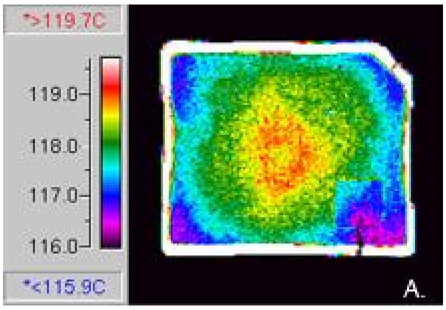


图 9 一块平板的温度分布图

【模型准备】如图 9 所示的平板代表一条金属梁的截面. 已知四周 8 个节点处的温度(单位°C)，求中间 4 个点处的温度 T_1, T_2, T_3, T_4.

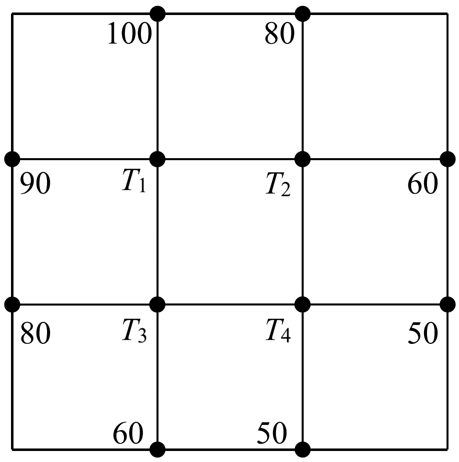


图 10 一块平板的温度分布图

【模型假设】假设忽略垂直于该截面方向上的热传导，并且每个节点的温度等于与它相邻的四个节点温度的平均值.

【模型建立】根据已知条件和上述假设，有如下线性方程组

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{1}{4}(90+100+T_2+T_3) \\ T_2 = \dfrac{1}{4}(80+60+T_1+T_4) \\ T_3 = \dfrac{1}{4}(80+60+T_1+T_4) \\ T_4 = \dfrac{1}{4}(50+50+T_2+T_3) \end{cases}$$

【**模型求解**】将上述线性方程组整理得

$$\begin{cases}4T_1-T_2-T_3 \qquad =190\\ -T_1+4T_2 \qquad -T_4=140\\ -T_1 \qquad +4T_3-T_4=140\\ \qquad -T_2-T_3+4T_4=100\end{cases}.$$

在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [4,-1,-1,0;-1,4,0,-1;-1,0,4,-1;0,-1,-1,4]; b = [190;140;140;100];
>> x = A\b; x'
```

Matlab 执行后得

```
ans =

   82.9167   70.8333   70.8333   60.4167
```

可见 $T_1 = 82.9167$, $T_2 = 70.8333$, $T_3 = 70.8333$, $T_4 = 60.4167$.

参考文献

陈怀琛, 高淑萍, 杨威, 工程线性代数, 北京: 电子工业出版社, 2007. 页码: 15-16.

Matlab 实验题

假定下图中的平板代表一条金属梁的截面, 并忽略垂直于该截面方向上的热传导. 已知平板内部有 30 个节点, 每个节点的温度近似等于与它相邻的四个节点温度的平均值. 设 4 条边界上的温度分别等于每位同学学号的后四位的 5 倍, 例如学号为 16308209 的同学计算本题时, 选择 $T_l = 40$, $T_u = 10$, $T_r = 0$, $T_d = 45$.

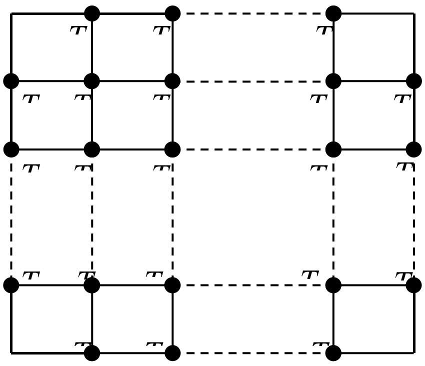


图 11 一块平板的温度分布图

(1) 建立可以确定平板内节点温度的线性方程组.

(2) 用 Matlab 软件求解该线性方程组.

(3) 用 Matlab 中的函数 mesh 绘制三维平板温度分布图.

案例十一. CT 图像的代数重建问题

X 射线透视可以得到 3 维对象在 2 维平面上的投影, CT 则通过不同角度的 X 射线得到 3 维对象的多个 2 维投影, 并以此重建对象内部的 3 维图像. 代数重建方法就是从这些 2 维投影出发, 通过求解超定线性方程组, 获得对象内部 3 维图像的方法.

图 12 双层螺旋 CT

图 13 CT 图像

这里我们考虑一个更简单的模型, 从 2 维图像的 1 维投影重建原先的 2 维图像. 一个长方形图像可以用一个横竖均匀划分的离散网格来覆盖, 每个网格对应一个像素, 它是该网格上各点像素的均值. 这样一个图像就可以用一个矩阵表示,其元素就是图像在一点的灰度值(黑白图像). 下面我们以 3×3 图像为例来说明.

表 4 消耗与产出情况

	3×3 图像 各点的灰度值			水平方向上 的叠加值
	$x_1 = 1$	$x_2 = 0$	$x_3 = 0$	$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
	$x_4 = 0$	$x_5 = 0.5$	$x_6 = 0.5$	$x_4 + x_5 + x_6 = 1$
	$x_7 = 0.5$	$x_8 = 0$	$x_9 = 1$	$x_7 + x_8 + x_9 = 1.5$
竖直方向上 的叠加值	$x_1 + x_4 + x_7$ $= 1.5$	$x_2 + x_5 + x_8$ $= 0.5$	$x_3 + x_6 + x_9$ $= 1.5$	

每个网格中的数字 x_i 代表其灰度值, 范围在[0, 1]内. 0 表示白色, 1 表示黑色, 0.5 表示灰色. 如果我们不知道网格中的数值, 只知道沿竖直方向和水平方向的叠加值, 为了确定网格中的灰度值, 可以建立线性方程组(含有 6 个方程, 9 个未知数)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ \cdots \\ x_3 + x_6 + x_9 = 1 \end{cases}$$

显然该方程组的解是不唯一的, 为了重建图像, 必须增加叠加值. 如我们增加从右上方到左下方的叠加值, 则方程组将增加 5 个方程

$$x_1 = 1,$$

$$x_2 + x_4 = 0,$$

$$x_3 + x_5 + x_7 = 1,$$

$$x_6 + x_8 = 0.5,$$

$$x_9 = 1,$$

和上面的 6 个方程放在一起构成一个含有 11 个方程, 9 个未知数的线性方程组.

【模型准备】设 3×3 图像中第一行 3 个点的灰度值依次为 x_1, x_2, x_3, 第二行 3 个点的灰度值依次为 x_4, x_5, x_6, 第三行 3 个点的灰度值依次为 x_7, x_8, x_9. 沿竖直方向的叠加值依次为 1.5, 0.5, 1.5, 沿水平方向的叠加值依次为 1, 1, 1.5, 沿右上方到左下方的叠加值依次为 1, 0, 1, 0.5, 1. 确定 $x_1, x_2, \ldots, x_9$ 的值.

【模型建立】由已知条件可得(含有 11 个方程, 9 个未知数的)线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ \cdots \\ x_9 = 1 \end{cases}$$

【模型求解】在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [1,1,1,0,0,0,0,0,0;0,0,0,1,1,1,0,0,0;0,0,0,0,0,0,1,1,1;
        1,0,0,1,0,0,1,0,0;0,1,0,0,1,0,0,1,0;0,0,1,0,0,1,0,0,1;
        1,0,0,0,0,0,0,0,0;0,1,0,1,0,0,0,0,0;0,0,1,0,1,0,1,0,0;
        0,0,0,0,0,1,0,1,0;0,0,0,0,0,0,0,0,1];
>> b = [1;1;1.5;1.5;0.5;1.5;1;0;1;0.5;1];
>> x = A\b; x'
```

Matlab 执行后得

```
Warning: Rank deficient, rank = 8  tol = 4.2305e-015.

ans =
```

1.0000　0.0000　0　-0.0000　0.5000　0.5000　0.5000　-0.0000　1.0000

可见上述方程组的解不唯一. 其中的一个特解为

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0.5, x_6 = 0.5, x_7 = 0.5, x_8 = 0, x_9 = 1.$$

【模型分析】上述结果表明, 仅有三个方向上的叠加值还不够.可以再增加从左上方到右下方的叠加值. 在实际情况下, 由于测量误差, 上述线性方程组可能是超定的. 这时可以将超定方程组的近似解作为重建的图像数据.

实践题

给定一个 3×3 图像的 2 个方向上的灰度叠加值: 沿左上方到右下方的灰度叠加值依次为 0.8, 1.2, 1.7, 0.2, 0.3; 沿右上方到左下方的灰度叠加值依次为 0.6, 0.2, 1.6, 1.2, 0.6.

(1) 建立可以确定网格数据的线性方程组, 并用 Matlab 求解.

(2) 将网格数据乘以 256, 再取整, 用 Matlab 绘制该灰度图像.

案例十二. 化学方程式配平问题

在用化学方法处理污水过程中, 有时会涉及到复杂的化学反应. 这些反应的化学方程式是分析计算和工艺设计的重要依据. 在定性地检测出反应物和生成物之后, 可以通过求解线性方程组配平化学方程式.

图 14 污水处理

【模型准备】某厂废水中含 KCN, 其浓度为 650mg/L. 现用氯氧化法处理, 发生如下反应:

$$KCN + 2KOH + Cl_2 = KOCN + 2KCl + H_2O.$$

投入过量液氯, 可将氰酸盐进一步氧化为氮气. 请配平下列化学方程式:

$$\_\_\_KOCN + \_\_\_KOH + \_\_\_Cl_2 === \_\_\_CO_2 + \_\_\_N_2 + \_\_\_KCl + \_\_\_H_2O.$$

(注: 题目摘自福建省厦门外国语学校 2008-2009 学年高三第三次月考化学试卷)

【模型建立】设

$$x_1KOCN + x_2KOH + x_3Cl_2 === x_4CO_2 + x_5N_2 + x_6KCl + x_7H_2O,$$

则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_6 \\ x_1 + x_2 = 2x_4 + x_7 \\ x_1 = x_4 \\ x_1 = 2x_5 \\ x_2 = 2x_7 \\ 2x_3 = x_6 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 - x_7 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_7 = 0 \\ 2x_3 - x_6 = 0 \end{cases}$$

【模型求解】在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [1,1,0,0,0,-1,0;1,1,0,-2,0,0,-1;1,0,0,-1,0,0,0;
        1,0,0,0,-2,0,0;0,1,0,0,0,0,-2;0,0,2,0,0,-1,0];
>> x = null(A,'r'); format rat, x'
```

Matlab 执行后得

```
ans =
    1        2        3/2        1        1/2        3        1
```

可见上述齐次线性方程组的通解为

$$\boldsymbol{x} = k(1, 2, 3/2, 1, 1/2, 3, 1)^{\mathrm{T}}.$$

取 $k = 2$ 得 $\boldsymbol{x} = (2, 4, 3, 2, 1, 6, 2)^{\mathrm{T}}$. 可见配平后的化学方程式如下

$$2KOCN + 4KOH + 3Cl_2 === 2CO_2 + N_2 + 6KCl + 2H_2O.$$

【模型分析】利用线性方程组配平化学方程式是一种待定系数法. 关键是根据化学方程式两边所涉及到的各种元素的量相等的原则列出方程. 所得到的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$ 中所含方程的个数等于化学方程式中元素的种数 s, 未知数的个数就是化学方程式中的项数 n.

当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n - 1$ 时, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$ 的基础解系中含有 1 个(线性无关的)解向量. 这时在通解中取常数 k 为各分量分母的最小公倍数即可. 例如本例中

$$1, 2, 3/2, 1, 1/2, 3, 1$$

分母的最小公倍数为 2, 故取 $k = 2$.

当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \le n - 2$ 时, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$ 的基础解系中含有 2 个以上的线性无关的解向量. 这时可以根据化学方程式中元素的化合价的上升与下降的情况, 在原线性方程组中添加新的方程.

参考文献

陈怀琛, 高淑萍, 杨威, 工程线性代数, 北京: 电子工业出版社, 2007. 页码: 84-85.

Matlab 实验题

配平下列反应式

(1) $FeS + KMnO_4 + H_2SO_4 —— K_2SO_4 + MnSO_4 + Fe_2(SO_4)_3 + H_2O + S\downarrow$

(2) $Al_2(SO_4)_3 + Na_2CO_3 + H_2O —— Al(OH)_3\downarrow + CO_2\uparrow + Na_2SO_4$

案例十三. 互付工资问题

互付工资问题是多方合作相互提供劳动过程中产生的. 比如农忙季节, 多户农民组成互助组, 共同完成各户的耕、种、收等农活. 又如木工, 电工, 油漆工等组成互助组, 共同完成各家的装潢工作. 由于不同工种的劳动量有所不同, 为了均衡各方的利益, 就要计算互付工资的标准.

图 15 农忙互助

图 16 装修互助

【模型准备】现有一个木工, 电工, 油漆工. 相互装修他们的房子, 他们有如下协议:

(1) 每人工作 10 天(包括在自己家的日子),

(2) 每人的日工资一般的市价在 60~80 元之间,

(3) 日工资数应使每人的总收入和总支出相等.

表 5 工作天数

工人 / 在谁家	木工	电工	油漆工
木工家	2	1	6
电工家	4	5	1
油漆工家	4	4	3

求每人的日工资.

【模型假设】假设每人每天工作时间长度相同. 无论谁在谁家干活都按正常情况工作, 既不偷懒, 也不加班.

【模型建立】设木工, 电工, 油漆工的日工资分别为 x, y, z 元, 则由下表

表 6 各家应付工资和各人应得收入

工人 / 在谁家	木工	电工	油漆工	各家应付工资
木工家	$2x$	$1y$	$6z$	$2x + y + 6z$

电工家	$4x$	$5y$	$1z$	$4x + 5y + z$
油漆工家	$4x$	$4y$	$3z$	$4x + 4y + 3z$
各人应得收入	$10x$	$10y$	$10z$	

可得

$$\begin{cases} 2x+y+6z=10x \\ 4x+5y+z=10y \\ 4x+4y+3z=10z \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -8x+y+6z=0 \\ 4x-5y+z=0 \\ 4x+4y-7z=0 \end{cases}$$

【模型求解】在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [-8,1,6;4,-5,1;4,4,-7];
>> x = null(A,'r'); format rat, x'
```

Matlab 执行后得

```
ans =
    31/36          8/9           1
```

可见上述齐次线性方程组的通解为 $\boldsymbol{x} = k(31/36, 8/9, 1)^{\mathrm{T}}$. 因而根据“每人的日工资一般的市价在 60~80 元之间”可知

$$60 \le \frac{31}{36}k < \frac{8}{9}k < k \le 80, \quad \text{即} \quad \frac{2160}{31} \le k \le 80.$$

也就是说, 木工, 电工, 油漆工的日工资分别为 $\frac{31}{36}k$ 元, $\frac{8}{9}k$ 元, k 元, 其中 $\frac{2160}{31} \le k \le 80$.

为了简便起见, 可取 $k = 72$, 于是木工, 电工, 油漆工的日工资分别为 62 元, 64 元, 72 元.

【模型分析】事实上各人都不必付自己工资, 这时各家应付工资和各人应得收入如下

表 7 各家应付工资和各人应得收入

工人 / 在谁家	木工	电工	油漆工	各家应付工资
木工家	0	$1y$	$6z$	$y + 6z$
电工家	$4x$	0	$1z$	$4x + z$
油漆工家	$4x$	$4y$	0	$4x + 4y$
个人应得收入	$8x$	$5y$	$7z$	

由此可得

$$\begin{cases} y+6z=8x \\ 4x+z=5y \\ 4x+4y=7z \end{cases}，即\begin{cases} -8x+y+6z=0 \\ 4x-5y+z=0 \\ 4x+4y-7z=0 \end{cases}$$

可见这样得到的方程组与前面得到的方程组是一样的.

<u>实践题</u>

甲, 乙, 丙三个农民组成互助组, 每人工作 6 天(包括为自己家干活的天数), 刚好完成他们三人家的农活, 其中甲在甲, 乙, 丙三家干活的天数依次为: 2, 2.5, 1.5; 乙在甲, 乙, 丙三家各干 2 天活, 丙在甲, 乙, 丙三家干活的天数依次为: 1.5, 2, 2.5. 根据三人干活的种类, 速度和时间, 他们确定三人不必相互支付工资刚好公平. 随后三人又合作到邻村帮忙干了 2 天(各人干活的种类和强度不变), 共获得工资 500 元.

问他们应该怎样分配这 500 元工资才合理?

案例十四. 平衡价格问题

为了协调多个相互依存的行业的平衡发展, 有关部门需要根据每个行业的产出在各个行业中的分配情况确定每个行业产品的指导价格, 使得每个行业的投入与产出都大致相等.

图 17 三个行业

【模型准备】假设一个经济系统由煤炭、电力、钢铁行业组成, 每个行业的产出在各个行业中的分配如下表所示:

表 7 行业产出分配表

产出分配			购买者
煤炭	电力	钢铁	
0	0.4	0.6	煤炭
0.6	0.1	0.2	电力
0.4	0.5	0.2	钢铁

每一列中的元素表示占该行业总产出的比例. 求使得每个行业的投入与产出都相等的平衡价格.

【模型假设】假设不考虑这个系统与外界的联系.

【模型建立】把煤炭、电力、钢铁行业每年总产出的价格分别用 x_1, x_2, x_3 表示, 则

$$\begin{cases} x_1 = 0.4x_2 + 0.6x_3 \\ x_2 = 0.6x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 \\ x_3 = 0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x_1 - 0.4x_2 - 0.6x_3 = 0 \\ -0.6x_1 + 0.9x_2 - 0.2x_3 = 0 \\ -0.4x_1 - 0.5x_2 + 0.8x_3 = 0 \end{cases}.$$

【模型求解】在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [1,-0.4,-0.6;-0.6,0.9,-0.2;-0.4,-0.5,0.8];
```

```
>> x = null(A,'r'); format short, x'
```

Matlab 执行后得

```
ans =

    0.9394    0.8485    1.0000
```

可见上述齐次线性方程组的通解为

$$\boldsymbol{x} = k(0.9394, 0.8485, 1)^{\mathrm{T}}.$$

这就是说, 如果煤炭、电力、钢铁行业每年总产出的价格分别 0.9394 亿元, 0.8485 亿元, 1 亿元, 那么每个行业的投入与产出都相等.

【模型分析】实际上, 一个比较完整的经济系统不可能只涉及三个行业, 因此需要统计更多的行业间的分配数据.

<u>Matlab 实验题</u>

假设一个经济系统由煤炭、石油、电力、钢铁、机械制造、运输行业组成, 每个行业的产出在各个行业中的分配如下表所示:

表 8 行业产出分配表

产出分配						购买者
煤炭	石油	电力	钢铁	制造	运输	
0	0	0.2	0.1	0.2	0.2	煤炭
0	0	0.1	0.1	0.2	0.1	石油
0.5	0.1	0.1	0.2	0.1	0.1	电力
0.4	0.1	0.2	0	0.1	0.4	钢铁
0	0.1	0.3	0.6	0	0.2	制造
0.1	0.7	0.1	0	0.4	0	运输

每一列中的元素表示占该行业总产出的比例. 求使得每个行业的投入与产出都相等的平衡价格.

参考文献

David C. Lay, 线性代数及其应用, 沈复兴, 傅莺莺等译, 北京: 人民邮电出版社, 2009. 页码: 49-50.

案例十五. 电路设计问题

电路是电子元件的神经系统. 参数的计算是电路设计的重要环节. 其依据来自两个方面: 一是客观需要, 二是物理学定律.

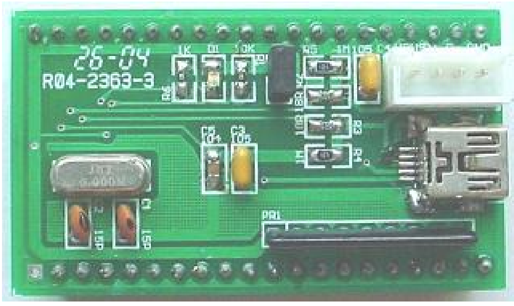


图 18　USB 扩展板

【模型准备】假设图 23 中的方框代表某类具有输入和输出终端的电路. 用$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$记录输入电压和输入电流(电压 v 以伏特为单位, 电流 i 以安培为单位), 用$\begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$记录输出电压和输入电流. 若$\begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为转移矩阵.

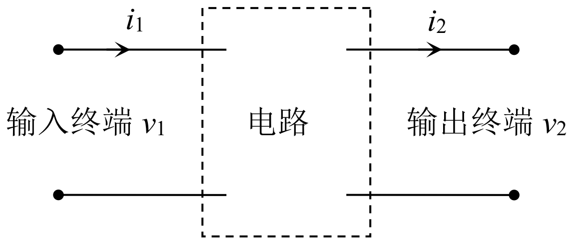


图 19 具有输入和输出终端的电子电路图

图 24 给出了一个梯形网络, 左边的电路称为串联电路, 电阻为 R_1(单位: 欧姆). 右边的电路是并联电路, 电路 R_2. 利用欧姆定理和楚列斯基定律, 我们可以得到串联电路和并联电路的转移矩阵分别是

$$\begin{pmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_2 & 1 \end{pmatrix}$$

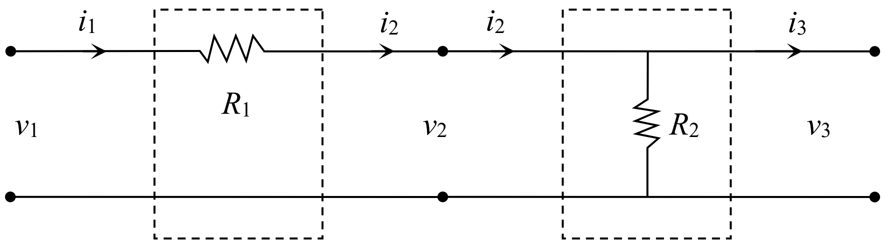


图 20 梯形网络

设计一个梯形网络，其转移矩阵是$\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -0.5 & 5 \end{pmatrix}$.

【模型假设】假设导线的电阻为零.

【模型建立】设 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 分别是串联电路和并联电路的转移矩阵，则输入向量 $\boldsymbol{x}$ 先变换成 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}$，再变换到 $\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x})$. 其中

$$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -R_1 \\ -1/R_2 & 1+R_1/R_2 \end{pmatrix}$$

就是图 22 中梯形网络的转移矩阵.

于是，原问题转化为求 R_1, R_2 的值使得$\begin{pmatrix} 1 & -R_1 \\ -1/R_2 & 1+R_1/R_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -0.5 & 5 \end{pmatrix}$.

【模型求解】由$\begin{pmatrix} 1 & -R_1 \\ -1/R_2 & 1+R_1/R_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -0.5 & 5 \end{pmatrix}$可得$\begin{cases} -R_1=-8 \\ -1/R_2=-0.5 \\ 1+R_1/R_2=5 \end{cases}$.

根据其中的前两个方程可得 $R_1=8, R_2=2$. 把 $R_1=8, R_2=2$ 代入上面的第三个方程确实能使等式成立. 这就是说在图 22 中梯形网络中取 $R_1=8, R_2=2$ 即为所求.

【模型分析】若要求的转移矩阵改为$\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -0.5 & 4 \end{pmatrix}$，则上面的梯形网络无法实现.

因为这时对应的方程组是$\begin{cases} -R_1=-8 \\ -1/R_2=-0.5 \\ 1+R_1/R_2=4 \end{cases}$. 根据前两个方程依然得到 $R_1=8, R_2=2$，

但把 $R_1=8, R_2=2$ 代入上第三个方程却不能使等式成立.

参考文献

David C. Lay, 线性代数及其应用, 沈复兴, 傅莺莺等译, 北京: 人民邮电出版社, 2009. 页码: 129-130.

练习题

根据基尔霍夫回路电路定律(各节点处流入和流出的电流强度的代数和为零, 各回路中各支路的电压降之和为零), 列出下图所示电路中电流 i_1, i_2, i_3 所满足的线性方程组, 并用矩阵形式表示:

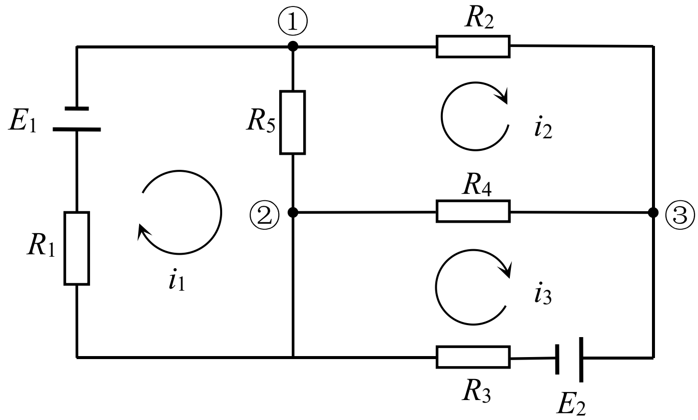


图 21 简单的回路

案例十六. 平面图形的几何变换

随着计算机科学技术的发展，计算机图形学的应用领域越来越广，如仿真设计、效果图制作、动画片制作、电子游戏开发等.

图 22 计算机图形学的广泛应用

图形的几何变换，包括图形的平移、旋转、放缩等，是计算机图形学中经常遇到的问题. 这里暂时只讨论平面图形的几何变换.

【模型准备】平面图形的旋转和放缩都很容易用矩阵乘法实现，但是图形的平移并不是线性运算，不能直接用矩阵乘法表示. 现在要求用一种方法使平移、旋转、放缩能统一用矩阵乘法来实现.

【模型假设】设平移变换为

$$(x, y) \to (x+a, y+b)$$

旋转变换(绕原点逆时针旋转θ角度)为

$$(x, y) \to (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

放缩变换(沿 x 轴方向放大 s 倍，沿 y 轴方向放大 t 倍)为

$$(x, y) \to (sx, ty)$$

【模型求解】$\mathbf{R}^2$ 中的每个点(x, y)可以对应于 $\mathbf{R}^3$ 中的$(x, y, 1)$它在 xOy 平面上方 1 单位的平面上. 我们称是的齐次坐标. 在齐次坐标下，平移变换

$$(x, y) \to (x+a, y+b)$$

可以用齐次坐标写成

$$(x, y, 1) \to (x+a, y+b, 1).$$

于是可以用矩阵乘积$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix}$实现.

旋转变换

$$(x, y) \to (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

可以用齐次坐标写成

$$(x, y, 1) \to (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, 1)$$

于是可以用矩阵乘积$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}$实现.

放缩变换

$$(x, y) \to (sx, ty)$$

可以用齐次坐标写成

$$(x, y, 1) \to (sx, ty, 1).$$

于是可以用矩阵乘积$\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx \\ ty \\ 1 \end{pmatrix}$实现.

【模型分析】由上述求解可以看出, $\mathbf{R}^2$ 中的任何线性变换都可以用分块矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix}$乘以齐次坐标实现, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶方阵. 这样, 只要把平面图形上点的齐次坐标写成列向量, 平面图形的每一次几何变换, 都可通过左乘一个 3 阶变换矩阵来实现.

参考文献

David C. Lay, 线性代数及其应用, 沈复兴, 傅莺莺等译, 北京: 人民邮电出版社, 2009. 页码: 139-141.

Matlab 实验题

在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>>clear all, clc,
>>t = [1,3,5,11,13,15]*pi/8;
>>x = sin(t); y=cos(t);
>>fill(x,y,'r');
>>grid on;
>>axis([-2.4, 2.4, -2, 2])
```

运行后得图 25.

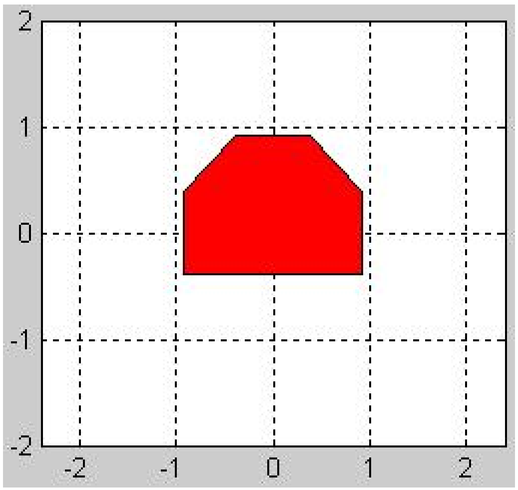


图 23 Matlab 绘制的图形

(1) 写出该图形每个顶点的齐次坐标;

(2) 编写 Matlab 程序, 先将上面图形放大 0.9 倍; 再逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$; 最后进行横坐标加 0.8, 纵坐标减 1 的图形平移. 分别绘制上述变换后的图形.

案例十七. 应用矩阵编制 Hill 密码

密码学在经济和军事方面起着极其重要的作用. 现代密码学涉及很多高深的数学知识. 这里无法展开介绍.

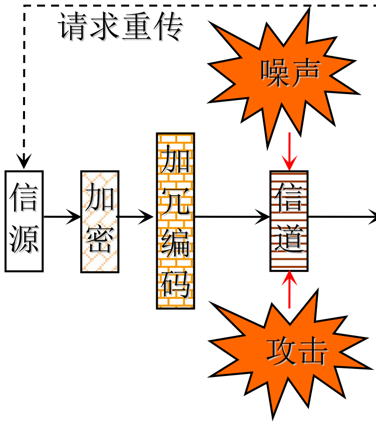


图 24 保密通信的基本模型

密码学中将信息代码称为**密码**, 尚未转换成密码的文字信息称为**明文**, 由密码表示的信息称为**密文**. 从明文到密文的过程称为**加密**, 反之为**解密**. 1929 年, 希尔(Hill)通过线性变换对待传输信息进行加密处理, 提出了在密码史上有重要地位的希尔加密算法. 下面我们略去一些实际应用中的细节, 只介绍最基本的思想.

【模型准备】若要发出信息 action, 现需要利用矩阵乘法给出加密方法和加密后得到的密文, 并给出相应的解密方法.

【模型假设】(1) 假定每个字母都对应一个非负整数, 空格和 26 个英文字母依次对应整数 0~26(见下表).

表 9 空格及字母的整数代码表

空格	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	

(2) 假设将单词中从左到右, 每 3 个字母分为一组, 并将对应的 3 个整数排成 3 维的行向量, 加密后仍为 3 维的行向量, 其分量仍为整数.

【模型建立】设 3 维向量 $\boldsymbol{x}$ 为明文, 要选一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 使密文 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}$, 还要确保接收方能由 $\boldsymbol{y}$ 准确地解出 $\boldsymbol{x}$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 必须是一个 3 阶可逆矩阵. 这样就可以由 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\boldsymbol{A}^{-1}$. 为了避免小数引起误差, 并且确保 $\boldsymbol{y}$ 也是整数向量, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的元素应该都是整数. 注意到, 当整数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式= ±1 时, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是整数矩阵. 因此原问题转化为

(1) 把 action 翻译成两个行向量: $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$.

(2) 构造一个行列式= ±1 的整数矩阵 $\boldsymbol{A}$(当然不能取 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$).

(3) 计算 $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{A}$.

(4) 计算 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

【模型求解】(1) 由上述假设可见 $\boldsymbol{x}_1=(1, 3, 20), \boldsymbol{x}_2=(9, 15, 14)$.

(2) 对 3 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$进行几次适当的初等变换(比如把某一行的整数被加到另一行, 或交换某两行), 根据行列式的性质可知, 这样得到的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为 1 或−1. 例如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&2&2\end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A}|=-1$.

(3) $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{A}=(1, 3, 20)\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&2&2\end{pmatrix}=(67, 44, 43)$,

$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=(9, 15, 14)\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&2&2\end{pmatrix}=(81, 52, 43)$.

(4) 由$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\3&2&2&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&2&-1\\0&1&0&1&-2&1\\0&0&1&-1&-1&1\end{pmatrix}$可得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&-2&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

这就是说, 接收方收到的密文是 67, 44, 43, 81, 52, 43. 要还原成明文, 只要计算$(67, 44, 43)\boldsymbol{A}^{-1}$和$(81, 52, 43)\boldsymbol{A}^{-1}$, 再对照表 9“翻译”成单词即可.

【模型分析】如果要发送一个英文句子, 在不记标点符号的情况下, 我们仍然可

以把句子(含空格)从左到右每 3 个字符分为一组(最后不足 3 个字母时用空格补上).

【模型检验】$(67, 44, 43)\boldsymbol{A}^{-1} = (1, 3, 20)$, $(81, 52, 43)\boldsymbol{A}^{-1} = (9, 15, 14)$.

参考文献

杨威, 高淑萍, 线性代数机算与应用指导, 西安: 西安电子科技大学出版社, 2009

<u>实践题</u>

1 按照上面的加密方法, 设密文为: 112, 76, 57, 51, 38, 18, 84, 49, 49, 68, 41, 32, 83, 55, 37, 70, 45, 25, 问恢复为原来的信息是什么?

2. 为了保密，军中经常针对不同的军事行动而更改密码，今若约定以 2×4 阶矩阵中每一列的数字和之个位数字代表更改后的密码，例如 $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ 所代表的密码为 7682。而且为了确保密码在传送过程中，不被敌方所窃取，因而作了加密动作，即将所要传送的密码之 2×4 阶矩阵乘以固定矩阵 X=$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，然后将所得出的 2×4 阶矩阵传送给对方，当对方收到传送过来的 2×4 阶矩阵后再进行解密的动作（例如：原始的矩阵为 A，先经过 XA=B 之运算后，再将 B 传送出去）。今若对方收到的 2×4 阶矩阵为 $\begin{bmatrix} 15 & 4 & 22 & 7 \\ 22 & 4 & 30 & 8 \end{bmatrix}$，问原始密码为何？

案例十八. 显示器色彩制式转换问题

彩色显示器使用红(R)、绿(G)和蓝(B)光的叠成效应生成颜色. 显示器屏幕的内表面由微粒象素组成, 每个微粒包括三个荧光点: 红、绿、蓝. 电子枪位于屏幕的后方, 向屏幕上每个点发射电子束. 计算机从图形应用程序或扫描仪发出数字信号到电子枪, 这些信号控制电子枪设置的电压强度. 不同 RGB 的强度组合将产生不同的颜色. 电子枪由电磁石帮助瞄准以确保快速精确地屏幕刷新.

图 25 彩色显示器的工作原理

颜色模型规定一些属性或原色, 将颜色分解成不同属性的数字化组合. 这就色彩制式的转换问题.

【模型准备】观察者在屏幕上实际看到的色彩要受色彩制式和屏幕上荧光点数量的影响. 因此每家计算机屏幕制造商都必须在(R, G, B)数据和国际通行的 CIE 色彩标准之间进行转换, CIE 标准使用三原色, 分别称为 X, Y 和 Z. 针对短余辉荧光点的一类典型转换是

$$\begin{pmatrix} 0.61 & 0.29 & 0.150 \\ 0.35 & 0.59 & 0.063 \\ 0.04 & 0.12 & 0.787 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

计算机程序把用 CIE 数据(X, Y, Z)表示的色彩信息流发送到屏幕. 求屏幕上的电子枪将这些数据转换成(R, G, B)数据的方程.

【模型建立】令 $A=\begin{pmatrix} 0.61 & 0.29 & 0.150 \\ 0.35 & 0.59 & 0.063 \\ 0.04 & 0.12 & 0.787 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\beta}$. 现在要根据 CIE 数据$(X, Y, Z)$计算对应的$(R, G, B)$数据, 就是等式 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\beta}$中 $\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{\beta}$已知, 求$\boldsymbol{\alpha}$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 则由 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\beta}$可得$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$.

【模型求解】在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [0.61,0.29,0.15;0.35,0.59,0.063;0.04,0.12,0.787];
>> if det(A)==0, 'A 不可逆'
   elseif 'A 可逆, A 的逆矩阵如下', B = inv(A),
   end
```

Matlab 执行后得

```
B =

    2.2586   -1.0395   -0.3473
   -1.3495    2.3441    0.0696
    0.0910   -0.3046    1.2777
```

于是$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 2.2586 & -1.0395 & -0.3473 \\ -1.3495 & 2.3441 & 0.0696 \\ 0.0910 & -0.3046 & 1.2777 \end{pmatrix}\boldsymbol{\beta}$. 这就是说，屏幕上的电子枪将 CIE 数据$(X, Y, Z)$转换成$(R, G, B)$数据的方程为

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2.2586 & -1.0395 & -0.3473 \\ -1.3495 & 2.3441 & 0.0696 \\ 0.0910 & -0.3046 & 1.2777 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

<u>Matlab 实验题</u>

民用电视信号发送使用向量(Y, I, Q)来描述每种颜色. 如果屏幕是黑白的，则只用到了 Y(这比 CIE 数据能提供更好的单色图象). YIQ 与“标准”RGB 色彩之间的对应如下

$$\begin{bmatrix} Y \\ I \\ Q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.596 & -0.275 & -0.321 \\ 0.212 & -0.528 & 0.311 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

(屏幕制造商需要调整矩阵元素一适应其 RGB 屏幕.) 求将电视台发送的数据转换成电视机屏幕所要求数据的方程.

参考文献

David C. Lay, 线性代数及其应用, 沈复兴, 傅莺莺等译, 北京: 人民邮电出版社, 2009. 页码: 147.

案例十九. 人员流动问题

【模型准备】某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计, 然后将$\frac{1}{6}$熟练工支援其他生产部门, 其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有$\frac{2}{5}$成为熟练工. 假设第一年一月份统计的熟练工和非熟练工各占一半, 求以后每年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比.

【模型建立】设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为x_n和y_n, 记成向量$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. 因为第一年统计的熟练工和非熟练工各占一半, 所以$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. 为了求以后每年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比, 先求从第二年起每年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比与上一年度统计的百分比之间的关系, 即求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$的关系式, 然后再根据这个关系式求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

【模型求解】根据已知条件可得:

$$x_{n+1} = (1-\frac{1}{6})x_n + \frac{2}{5}(\frac{1}{6}x_n + y_n) = \frac{9}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n,$$

$$y_{n+1} = (1-\frac{2}{5})(\frac{1}{6}x_n + y_n) = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n,$$

即

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9/10 & 2/5 \\ 1/10 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 9/10 & 2/5 \\ 1/10 & 3/5 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^2\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}=\ldots=\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-\frac{9}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & \lambda-\frac{3}{5} \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-\tfrac{1}{2}),$$

由此可得 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1/2$.

解$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=\boldsymbol{0}$ 得对应于$\lambda_1=1$ 的一个特征向量$\boldsymbol{\xi}_1=(4, 1)^{\mathrm{T}}$,

解$(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=\boldsymbol{0}$ 得对应于$\lambda_2=1/2$ 的一个特征向量$\boldsymbol{\xi}_2=(-1, 1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1})^n=\boldsymbol{P}\Lambda^n\boldsymbol{P}^{-1}$,

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\Lambda^n\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{-1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=(\frac{4-3\times 2^{-n-1}}{5},\ \frac{1+3\times 2^{-n-1}}{5})^{\mathrm{T}}.$$

注: 也可以在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [9/10,2/5;1/10,3/5]; format rat
>> [P,D] = eig(A)
```

Matlab 执行后得

```
P =
    2112/2177     -985/1393
    528/2177      985/1393
D =
      1             0
      0            1/2
```

为了进一步计算$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}$, 即 $\boldsymbol{P}\Lambda^n\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$, 在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> syms n  %定义符号变量
>> P*[1,0;0,1/2^n]*P^(-1)*[1/2;1/2]
```

Matlab 执行后得

```
ans =
    [ 4/5-3/10/(2^n)]
    [ 1/5+3/10/(2^n)]
```

【模型分析】当 $n \to \infty$ 时，$\dfrac{4-3\times 2^{-n-1}}{5} \to \dfrac{4}{5}$，$\dfrac{1+3\times 2^{-n-1}}{5} \to \dfrac{1}{5}$. 这意味着，随着 n 增加，熟练工和非熟练工所占百分比趋于稳定，分别趋向于 80%和 20%.

Matlab 实验题

1.某地区甲、乙两公司经营同一业务. 经验表明甲公司的客户每年有 1/3 继续留作甲的客户，而 2/3 转作乙的客户；乙的客户有 3/5 转作甲的客户，而 2/5 继续留作乙的客户，假定客户的总量不变.

(1)假定起始年甲、乙两公司拥有的客户份额分别为 2/3 和 1/3，求一年后客户市场分配情况；

(2)试确定起始年客户份额，使甲、乙两公司在一年后市场份额不变.

2 员工培训问题

某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将 1/6 熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐。新、老非熟练工经培训及实践至年终考核有 2/5 成为熟练工。若记第 n 年一月份统计的熟练工与非熟练工所占比例分别为$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$，求$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$。

参考文献

[1] 陈建龙，周建华，韩瑞珠，周后型. 线性代数. 北京：科学出版社，2007.

[2] 俞南雁，韩瑞珠，周建华，线性代数与空间解析几何. 北京：科学出版社，1999.

[3] 张小向，陈建龙，线性代数学习指导. 北京：科学出版社，2008.

案例二十. 金融公司支付基金的流动

【模型准备】金融机构为保证现金充分支付, 设立一笔总额 5400 万的基金, 分开放置在位于 A 城和 B 城的两家公司, 基金在平时可以使用, 但每周末结算时必须确保总额仍然为 5400 万. 经过相当长的一段时期的现金流动, 发现每过一周, 各公司的支付基金在流通过程中多数还留在自己的公司内, 而 A 城公司有 10%支付基金流动到B城公司, B 城公司则有 12%支付基金流动到 A 城公司. 起初 A 城公司基金为 2600 万, B 城公司基金为 2800 万. 按此规律, 两公司支付基金数额变化趋势如何? 如果金融专家认为每个公司的支付基金不能少于 2200 万, 那么是否需要在必要时调动基金?

【模型建立】设第 k+1 周末结算时, A 城公司 B 城公司的支付基金数分别为 a_{k+1}, b_{k+1} (单位:万元), 则有 a_0=2600, b_0=2800,

$$\begin{cases} a_{k+1} = 0.9a_k + 0.12b_k \\ b_{k+1} = 0.1a_k + 0.88b_k \end{cases}.$$

原问题转化为:

(1) 把 a_{k+1}, b_{k+1} 表示成 k 的函数, 并确定 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k$ 和 $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k$.

(2) 看 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k$ 和 $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k$ 是否小于 2200.

【模型求解】由 $\begin{cases} a_{k+1} = 0.9a_k + 0.12b_k \\ b_{k+1} = 0.1a_k + 0.88b_k \end{cases}$ 可得

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.12 \\ 0.1 & 0.88 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.12 \\ 0.1 & 0.88 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.12 \\ 0.1 & 0.88 \end{pmatrix}^{k+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.12 \\ 0.1 & 0.88 \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{k+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{k+1} \begin{pmatrix} 2600 \\ 2800 \end{pmatrix}$. 为了计算 $\boldsymbol{A}^{k+1} \begin{pmatrix} 2600 \\ 2800 \end{pmatrix}$, 在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [0.9,0.12;0.1,0.88];
>> [P,D] = eig(A)
```

Matlab 执行后得

```
P =

    0.7682   -0.7071

    0.6402    0.7071

D =

    1.0000         0

         0    0.7800
```

这意味着 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.78\end{pmatrix}$，于是有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PDP}^{-1},$$

$$\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{PD}^{k+1}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.78^{k+1}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

$$\begin{pmatrix}a_{k+1}\\ b_{k+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{k+1}\begin{pmatrix}2600\\ 2800\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.78^{k+1}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}2600\\ 2800\end{pmatrix}.$$

在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> syms k  %定义符号变量
>> P*[1,0;0,0.78^(k+1)]*P^(-1)*[2600;2800]
```

Matlab 执行后得

```
ans =
    [ 32400/11-3800/11*(39/50)^(k+1)]
    [ 27000/11+3800/11*(39/50)^(k+1)]
```

这就是说，$\begin{pmatrix}a_{k+1}\\ b_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{32400}{11}-\dfrac{3800}{11}\bullet\left(\dfrac{39}{50}\right)^{k+1}\\ \dfrac{27000}{11}+\dfrac{3800}{11}\bullet\left(\dfrac{39}{50}\right)^{k+1}\end{pmatrix}$，其中 $\dfrac{39}{50}<1$.

可见$\{a_k\}$单调递增，$\{b_k\}$单调递减，而且 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_k=\dfrac{32400}{11}$，$\lim\limits_{k\to+\infty}b_k=\dfrac{27000}{11}$.

而 $\dfrac{32400}{11}\approx 2945.5$，$\dfrac{27000}{11}\approx 2454.5$，两者都大于 2200，所以不需要调动基金.

Matlab 实验题

请同学们注意，本题中的参数 a 是你的学号后三位，$b=2a$. 例如，你的学号后三位是 216，则取 $a=216, b=432$.

金融机构为保证现金充分支付，设立一笔基金，分开放置在位于 A 城和 B 城的两家公司，基金在平时可以使用，但每周末结算时必须确保总额不变. 经过相当长的一段时期的现金流动，发现每过一周，各公司的支付基金在流通过程中多数还留在自己的公司内，而 A 城公司有 10%支付基金流动到 B 城公司，B 城公司则有 12%支付基金流动到 A 城公司. 起初 A 城公司基金为 a 万元，B 城公司基金为 b 万元. 按此规律，两公司支付基金数额变化趋势如何?

案例二十一. 选举问题

【模型准备】设有 A, B, C 三个政党参加每次的选举, 每次参加投票的选民人数保持不变. 通常情况下, 由于社会、经济、各党的政治主张等多种因素的影响, 原来投某党票的选民可能改投其他政党.

【模型假设】 (1) 参与投票的选民不变, 而且没有弃权票.

(2) 每次投 A 党票的选民, 下次投票时, 分别有 r_1, r_2, r_3 比例的选民投 A, B, C 政党的票; 每次投 B 党票的选民, 下次投票时, 分别有 s_1, s_2, s_3 比例的选民投 A, B, C 各政党的票; 每次投 C 党票的选民, 下次投票时, 分别有 t_1, t_2, t_3 比例的选民投 A, B, C 各政党的票.

(3) x_k, y_k, z_k 表示第 k 次选举时分别投 A, B, C 各党的选民人数.

【模型建立】根据假设可得

$$\begin{cases} x_{k+1} = r_1 x_k + s_1 y_k + t_1 z_k \\ y_{k+1} = r_2 x_k + s_2 y_k + t_2 z_k \\ z_{k+1} = r_3 x_k + s_3 y_k + t_3 z_k \end{cases}$$

其中 $r_1 + r_2 + r_3 = 1, s_1 + s_2 + s_3 = 1, t_1 + t_2 + t_3 = 1.$

令

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix},$$

上式可以表示为

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k .$$

如果给出问题的初始值, 就可以求出任一次选举时的选民投票情况.

<u>Matlab 实验题</u>

设有 A, B, C 三个政党参加每次的选举. 每次投 A 党票的选民, 下次投票时, 分别有 80%, 10%, 10%比例的选民投 A, B, C 政党的票; 每次投 B 党票的选民, 下次投票时, 分别有 10%, 75%, 15%比例的选民投 A, B, C 各政党的票; 每次投 C 党票的选

民, 下次投票时, 分别有 5%, 10%, 85%比例的选民投 A, B, C 各政党的票. 第一次 A, B, C 三个政党获得的票数分别为 1800 万, 2000 万, 1600 万. 求出第 10 次选举时的选民投票情况.

案例二十二. 简单的种群增长问题

【模型准备】经过统计, 某地区猫头鹰和森林鼠的数量具有如下规律: 如果没有森林鼠做食物, 每个月只有一半的猫头鹰可以存活, 如果没有猫头鹰作为捕食者, 老鼠的数量每个月会增加 10%. 如果老鼠充足(数量为 R), 则下个月猫头鹰的数量将会增加 $0.4R$. 平均每个月每只猫头鹰的捕食会导致的 104 只老鼠的死亡数. 试确定该系统的演化情况.

【模型假设】不考虑其他因素对猫头鹰和森林鼠的数量的影响.

【模型建立】设猫头鹰和森林鼠在时刻 k 的数量为 $\boldsymbol{x}_k=\begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix}$, 其中 k 是以月份为单位的时间, O_k 是研究区域中猫头鹰的数量, R_k 是老鼠的数量(单位: 千只). 则

$$O_{k+1} = 0.5O_k + 0.4R_k,$$

$$R_{k+1} = -0.104O_k + 1.1R_k.$$

分析 $\boldsymbol{x}_k$ 的变化趋势.

【模型求解】令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -0.104 & 1.1 \end{pmatrix}$, 则的特征值 $\lambda_1 = 1.02$, $\lambda_2 = 0.58$. 对应的特征向量为

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

初始向量 $\boldsymbol{x}_0$ 可以写成 $\boldsymbol{x}_0 = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2$. 于是, 对于 $k \ge 0$,

$$\boldsymbol{x}_k = c_1(1.02)^k\boldsymbol{v}_1 + c_2(0.58)^k\boldsymbol{v}_2 = c_1(1.02)^k\begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} + c_2(0.58)^k\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

当 $k \to \infty$时, $(0.58)^k$迅速的趋向于 0. 假定 $c_1 > 0$, 则对于所有足够大的 k, $\boldsymbol{x}_k$ 近似地等于 $c_1(1.02)^k\boldsymbol{v}_1$, 写为

$$\boldsymbol{x}_k \approx c_1(1.02)^k\begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

k 越大近似程度越高, 所以对于充分大的 k,

$$\boldsymbol{x}_{k+1} \approx c_1(1.02)^{k+1}\begin{pmatrix}10\\13\end{pmatrix} = 10.2\,\boldsymbol{x}_k. \qquad (*)$$

【模型分析】上面的(*)式表明, 最后猫头鹰和老鼠的数量几乎每个月都近似增加到原来的 1.02 倍, 即有 2%的月增长率. 而且 O_k 与 R_k 的比值约为 10 比 13, 即每 10 只猫头鹰对应着约 13000 只老鼠.

参考文献

David C. Lay, 线性代数及其应用, 沈复兴, 傅莺莺等译, 北京: 人民邮电出版社, 2009. 页码: 305.

Matlab 实验题

1. 假设在一个自然生态地区生长着一群鹿, 在一段时间内, 鹿群的增长受资源制约的因素较小. 假设:

(1) 公、母鹿占群体总数的比例大致相等, 所以仅考虑母鹿的增长情况;

(2) 鹿群中母鹿的数量足够大, 因而可近似地用实数表示;

(3) 将母鹿分成两组: 一岁以下的称为幼鹿组, 其余的称为成年组;

(4) 将时间离散化, 每年观察一次, 分别用 x_k, y_k 表示第 k 年的幼鹿数及成年鹿数, 且假设各年的环境因素都是不变的;

(5) 分别用 b_1, b_2 表示两个年龄组鹿的雌性生育率, 用 d_1, d_2 表示其死亡率. 出生率、死亡率为常数, 记 $s_1 = 1-d_1, s_2 = 1-d_2$;

(6) 鹿的数量不受自然资源的影响;

(7) 刚出生的幼鹿在哺乳期的存活率为 s, 设 $t_1 = sb_1, t_2 = sb_2$.

根据以上假设, 求$\begin{pmatrix}x_{k+1}\\y_{k+1}\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}x_k\\y_k\end{pmatrix}$之间的关系式, 并对下面一组数据进行实验:

$$x_0 = \text{实验者学号的后三位}, y_0 = 1000, t_1 = 0.24, t_2 = 1.2, s_1 = 0.62, s_2 = 0.75.$$

预测鹿群的增长趋势如何?

2. 斐波拉契(Fibonacci)兔子问题. 13 世纪初, 欧洲数学家斐波拉契写了一本叫做《算盘书》的著作. 书中有许多有趣的数学题, 其中最有趣的是下面这个题目:

如果一对兔子每月能生 1 对小兔子, 而每对小兔在它出生后的第 3 个月里, 又能开始生 1 对小兔子, 假定在不发生死亡的情况下, 由 1 对初生的兔子开始, 1 年后能繁殖成多少对兔子?

斐波拉契把推算得到的头几个数摆成一串: 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

这串数里隐含着一个规律: 从第 3 个数起, 后面的每个数都是它前面那两个数的和. 而根据这个规律推算出来的数, 构成了数学史上一个有名的"斐波拉契数列". 这个数列有许多奇特的的性质. 例如, 从第 3 个数起, 每个数与它后面那个数的比值, 都很接近于 0.618, 正好与"黄金分割律"相吻合.

记斐波拉契数列为 $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, \ldots$ 先求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 使得

$$\begin{pmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix},$$

再计算出斐波拉契数列的前 20 项, 并计算 $F_3/F_4, F_4/F_5, \ldots, F_{19}/F_{20}$.

案例二十三. 一阶常系数线性齐次微分方程组的求解

【模型准备】一只虫子在平面直角坐标系内爬行. 开始时位于点 $P_0(1, 0)$处. 如果知道虫子在点 $P(x, y)$处沿 x 轴正向的速率为 $4x - 5y$, 沿 y 轴正向的速率为 $2x - 3y$. 如何确定虫子爬行的轨迹的参数方程?

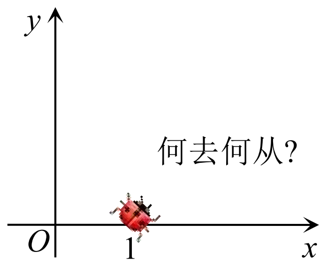


图 26 虫子爬行的轨迹

【模型假设】设 t 时刻虫子所处位置的坐标为$(x(t), y(t))$.

【模型构成】由已知条件和上述假设可知

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4x - 5y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x - 3y, \end{cases} \text{而且}(x(0), y(0)) = (1, 0).$$

现要由此得出虫子爬行的轨迹的参数方程.

【模型求解】令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, 则$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 5 \\ -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-2)$. 可见 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$.

$(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$ 的一个基础解系为: $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$;

$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$ 的一个基础解系为: $\boldsymbol{\xi}_2 = (5, 2)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P} = (\xi_1, \xi_2)$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

记 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, 并且作线性变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{PY}$, 则 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}$,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{P}^{-1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APY} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{Y},$$

即

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}u/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v/\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

故 $u = c_1 e^{-t}, v = c_2 e^{2t}$, 即 $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$. 因而

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y}|_{t=0} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}|_{t=0} = \begin{pmatrix} -2/3 & 5/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3}e^{-t} \\ \dfrac{1}{3}e^{2t} \end{pmatrix}, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{PY} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3}e^{-t} \\ \dfrac{1}{3}e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3}e^{-t} + \dfrac{5}{3}e^{2t} \\ -\dfrac{2}{3}e^{-t} + \dfrac{2}{3}e^{2t} \end{pmatrix}.$$

这就是说, 虫子爬行的轨迹的参数方程为 $\begin{cases} x = -\dfrac{2}{3}e^{-t} + \dfrac{5}{3}e^{2t}, \\ y = -\dfrac{2}{3}e^{-t} + \dfrac{2}{3}e^{2t}. \end{cases}$

如果在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>>ezplot('-2/3*exp(-t)+5/3*exp(2*t)','-2/3*exp(-t)+2/3*exp(2*t)',[0,1])
>> grid on;
>> axis([0, 12, 0, 5])
```

Matlab 执行后得

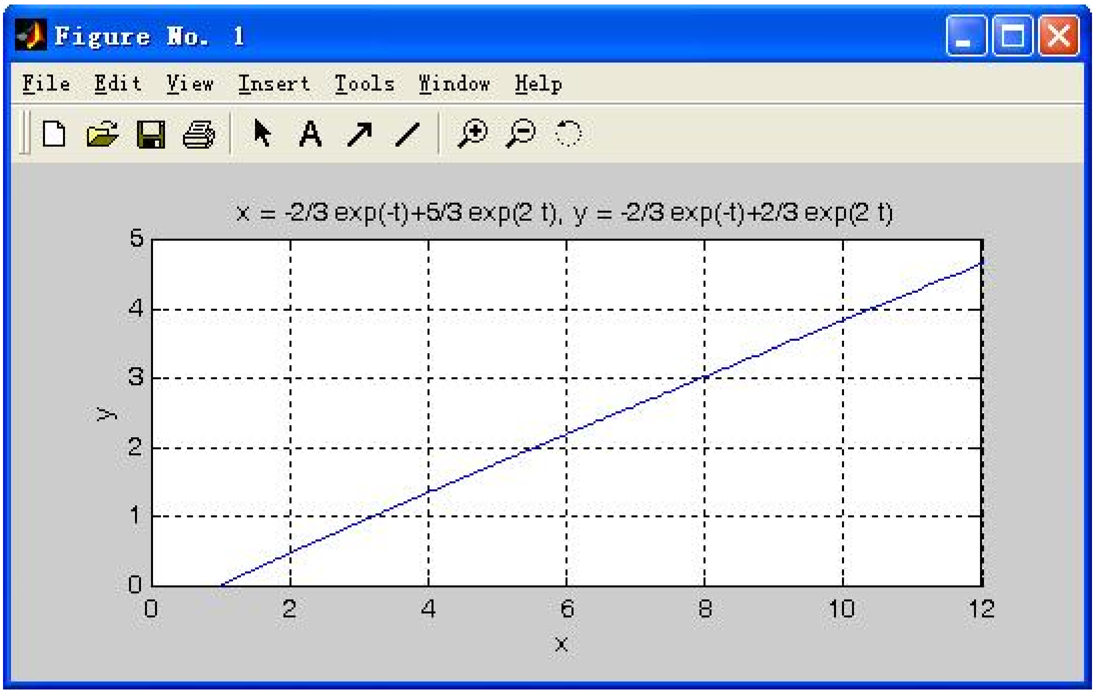


图 27 Matlab 绘制的虫子爬行轨迹

【模型分析】从图 32 可以看出虫子爬行的轨迹接近一条直线.

Matlab 实验题

一只虫子在平面直角坐标系内爬行. 开始时位于点 $P_0(0, 1)$处. 如果知道虫子在点 $P(x, y)$处沿 x 轴正向的速率为 $x+y$, 沿 y 轴正向的速率为 $2x-y$. 求虫子爬行的轨迹的参数方程, 并绘制虫子爬行的轨迹.

附录

行列式的应用

案例 1 大学生在饮食方面存在很多问题，多数大学生不重视吃早餐，日常饮食也没有规律，为了身体的健康就需要注意日常饮食中的营养。大学生每天的配餐中需要摄入一定的蛋白质、脂肪和碳水化合物，下表给出了这三种食物提供的营养以及大学生的正常所需营养（它们的质量以适当的单位计量）。

营养	单位食物所含的营养			所需营养
	食物 1	食物 2	食物 3	
蛋白质	36	51	13	33
脂肪	0	7	1.1	3
碳水化合物	52	34	74	45

试根据这个问题建立一个线性方程组，并通过求解方程组来确定每天需要摄入的上述三种食物的量。

案例 2 一个土建师、一个电气师、一个机械师组成一个技术服务社。假设在一段时间内，每个人收入 1 元人民币需要支付给其他两人的服务费用以及每个人的实际收入如下表所示，问这段时间内，每人的总收入是多少？（总收入=实际收入+支付服务费）

服务者	被服务者			实际收入
	土建师	电气师	机械师	
土建师	0	0.2	0.3	500
电气师	0.1	0	0.4	700
机械师	0.3	0.4	0	600

案例 3 医院营养师为病人配制的一份菜肴由蔬菜、鱼和肉松组成，这份菜肴需含 1200cal

热量，30g 蛋白质和 300mg 维生素 c，已知三种食物每 100g 中的有关营养的含量如下表，试求所配菜肴中每种食物的数量。

	蔬菜	鱼	肉松
热量/cal	60	300	600
蛋白质/g	3	9	6
维生素 c/mg	90	60	30

矩阵的应用

案例 4　矩阵概念的引入

（1） 线性方程组

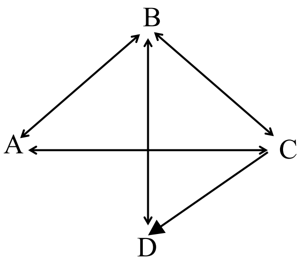
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n), b_j(j=1,2,\cdots,n)$ 按原来的位置构成一数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

该数表决定着上述方程组是否有解，以及如果有解，解是什么等问题，因而研究这个数表就很重要。

（2） 某航空公司在 A,B,C,D 四城市之间开辟了若干航线，下图所示表述了四城市间的航班图，若从 A 到 B 有航班，则用带箭头的线连接 A 和 B。



		列表表示到站			
		A	B	C	D
行标表示发站	A		√	√	
	B	√		√	√
	C	√	√		√
	D		√		

为了便于研究，表中√为 1，空白为 0，得到下列数表：

0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
0	1	0	0

(3) 某中学学生身高体重的测量，得到如下一份统计如下表

人数 \ 体重（kg） 身高（m）	40	50	60	70
1.5	60	80	70	20
1.6	30	120	150	90
1.7	10	15	80	150
1.8	0	2	5	10

此表反映身高与体重这种关系时也可将上面表格写成一个简化的 4 行 4 列的矩形数表，

	40（kg）	50（kg）	60（kg）	70（kg）
1.5	60	80	70	20
1.6	30	120	150	90
1.7	10	15	80	150
1.8	0	2	5	10

如果只反映 1.5 米与体重的关系，则可以用（60 80 70 20）；如果只反映 60kg 与身高的关系，则可以用$\begin{pmatrix} 70 \\ 150 \\ 80 \\ 5 \end{pmatrix}$。

案例 5 矩阵概念的应用——逻辑判断问题

甲、乙、丙、丁四人各从图书馆借来一本小说，他们约定读完后互相交换，这四本书的厚度以及他们四人的阅读速度差不多，因此，四人总是同时交换书，经三次交换后，他们四人读完了这四本书，现已知：

（1）乙读的最后一本书是甲读的第二本书;

（2）丙读的第一本书是丁读的最后一本书。

问四人的阅读顺序是怎样的？

解： 设甲、乙、丙、丁最后读的书的代号依次为 A,B,C,D,则根据题设条件可以列出初始矩阵

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} & \text{丁} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} & & \mathrm{D} & \\ \mathrm{B} & & & \\ & & & \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

下面我们来分析矩阵中各位置的书名代号。已知每个人都读完了所有的书，所以并第二次读的书不可能是 C,D。又甲第二次读的书是 B，所以丙第二次读的书也不可能是 B，从而丙第二次读的书是 A，同理可依次推出丙第三次读的书是 B，丁第二次读的书是 C，丁第三次读的书是 A，丁第一次读的书是 B，乙第二次读的书是 D，甲第一次读的书是 C，乙第一次读的书是 A，乙第三次读的书是 C，甲第三次读的书是 D。故四人阅读的顺序可用矩阵表示如下：

$$
\begin{pmatrix} C & A & \mathrm{D} & B \\ \mathrm{B} & D & A & \mathrm{C} \\ D & C & B & A \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}
$$

案例 6 矩阵乘法的应用

某企业某年出口到三个国家的两种货物的数量及两种货物的单位价格、重量、体积如下表所示：

数量 国家 货	美国	德国	日本
A_1	3000	1500	2000
A_2	1400	1300	800

	单位价格（万元）	单位重量（吨）	单位体积（m^3）
A_1	0.5	0.04	0.2
A_2	0.4	0.06	0.4

利用矩阵乘法计算该企业出口到三个国家的货物总价值、总重量、总体积各为多少？

案例 7 逆矩阵的应用

一个城市有三个重要的企业：一个煤矿，一个发电厂和一条地方铁路。开采一块钱的煤，煤矿必须支付 0.25 元的运输费。而生产一块钱的电力，发电厂需支付煤矿 0.65 元的燃料费，自己亦需支付 0.05 元的电费来驱动辅助设备及支付 0.05 元的运输费。而提供一块钱的运输费铁路需支付煤矿 0.55 元的燃料费，0.10 元的电费驱动它的辅助设备。某个星期内，煤矿从外面接到 50000 元煤的订货，发电厂从外面接到 25000 元电力的订货，外界对地方铁路没有要求。问这三个企业在那一个星期的生产总值各为多少时才能精确地满足它们本身的要求和外界的要求？

案例 8 求解线性方程组

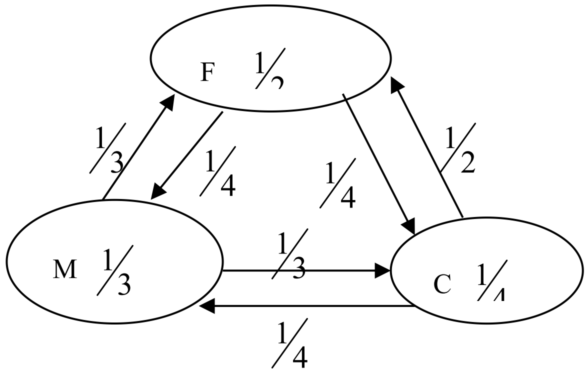
（1） 假设你是一个建筑师，某小区要建设一栋公寓，现在有一个模块构造计划方案需要你来设计，根据基本建筑面积每个楼层可以有三种设置户型的方案，如下表所示。如果要设计出含有 136 套一居室，74 套两居室，66 套三居室，是否可行？设计方案是否唯一？

方案	一居室（套）	两居室（套）	三居室（套）
A	8	7	3
B	8	4	4
C	9	3	5

（2） 在一个原始部落中，农田耕作记为 F，农具及工具的制作记为 M，织物的编织记为 C。人们之间的贸易是实物交易系统（见下图）。由图中可以看出，农夫将每年的收获留下一半，

分别拿出四分之一给工匠和织布者；工匠平均分配他们制作的用具给每个组。织布者则留下四份之一的衣物为自己，四分之一给工匠，二分之一给农夫。

随着社会的发展，实物交易形式需要改为货币交易。假设没有资本和负债，那么如何对每类产品定价才能公正地体现原有的实物交易系统？



也可以用下表表示：

组名	F	M	C
F	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
M	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

（3） 某药厂生产 3 种中成药，每件中成药的生产要经过 3 个车间加工。3 个车间每周的工时、每件中成药在各车间需要的工时数如下表所示，问 3 中中成药每周的产量各是多少？

	中成药 1	中成药 2	中成药 3	车间工时（时/周）
车间 1	1	1	2	40
车间 2	3	2	3	75
车间 3	1	1	1	28

案例 9 解线性方程组应用—人口迁移模型

在生态学、经济学和工程学等许多领域中经常需要对随时间变化的动态系统进行数学建模，此类系统中的某些量常按离散时间间隔来测量，这样就产生了与时间间隔相应的向量序列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$，其中 x_n 表示第 n 次测量时系统状态的有关信息，而 x_0 常被称为初始向量。

如果存在矩阵 A，并给定初始向量 x_0，使得 $x_1 = Ax_0, x_2 = Ax_1, \cdots$，即

$$x_{n+1} = Ax_n \, (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

则上述方程为一个线性差分方程或者递归方程。

（1） 已知某城市 2009 年的城市人口为 5000000 人，农村人口为 7800000 人。假设每年大约有 5%的城市人口迁移到农村（95%仍然留在城市），12%的农村人口迁移到城市（88%仍然留在农村），如下图所示，忽略其他因素对人口规模的影响。计算 2011 年的人口分布。

(2) 在某个地区，每年约有 4%的城市人口移居到周围的农村，大约 5%的农村人口移居到城市中。在 2009 年，城市中有 400000 居民，农村有 600000 居民。建立一个差分方程来描述这种情况，用 x_0 表示 2009 年的初始人口，然后估计两年之后，即 2011 年城市和农村的人口数量（忽略其他因素对人口规模的影响）

（3） 某公司有一个车队，大约有 450 辆车，分布在三个地点。一个地点租出去的车可以归还到三个地点中的任意一个，但租出的车不许当日归还。下面的矩阵给出了汽车归还到每个地点的不同比率。假设星期一在机场有 304 辆车，东部办公区有 48 辆车，西部办公区有 98 辆车，那么在星期三时，车辆的大致分布式怎么样？

车辆出租地

机场	东部	西部	归还到
0.97	0.05	0.1	机场
0	0.9	0.05	东部
0.03	0.05	0.85	西部

案例 10 生产计划问题

（1）假设某厂计划生产甲、乙两种产品，现库存主要原料有 A 类 3600kg，B 类 2000kg,C 类 3000kg.每件甲产品需用材料 A 类 9kg,B 类 4kg,C 类 3kg。每件乙产品需用材料 A 类 4kg,B 类 5kg,C 类 10kg。甲单位产品的利润 70 元，乙单位产品的利润 120 元。问如何安排生产，才能使该厂所获的利润最大。

（2） 某工厂生产 A,B 两种产品，已知生产 A 产品每公斤需耗煤 9 吨，耗电 400 度，用工 3 个工作日；生产 B 产品每公斤需耗煤 4 吨，耗电 500 度，用工 10 个劳动日。A 产品每公斤利润 700 元，B 产品每公斤利润 1200 元，因客观条件限制，该厂只能得到煤 360 吨，电 20000 度，劳动力 300 个，问该厂如何安排生产才能使总利润最大?

案例 11 投资问题

某公司有一批资金用于 4 个工程项目的投资，其投资各项目时所得的净收益（投入资金的百分比）如下表所示。由于某种原因，决定用于项目 A 的投资不大于其他各项投资之和，而用于项目 B 和 C 的投资要大于项目 D 的投资。试确定该公司收益最大的投资分配方案。

工程项目	A	B	C	D
收益（%）	15	10	8	12

案例 12 运输问题

有 A,B,C 三个食品加工厂，负责供给甲、乙、丙、丁 4 个市场。3 个工厂每天生产食品箱数如表 1 所示；4 个市场每天的需求量如表 2 所示；从各厂运到各市场的运输费（元/箱）如表 3 所示。求在基本满足供需平衡的约束条件下使总运输费用最小。

表 1

工厂	A	B	C
生产数	60	40	50

表 2

市场	甲	乙	丙	丁
需求量	20	35	33	34

表 3

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">收点
发点</td><td colspan="4">市场</td></tr>
<tr><td>甲</td><td>乙</td><td>丙</td><td>丁</td></tr>
<tr><td rowspan="3">工厂</td><td>A</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>B</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>C</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

案例 13 合理下料问题

某工厂有一批 5 米的钢管（数量充足），为制造零件的需要，要将它们截成 140 厘米，95 厘米，65 厘米的管料，并要求这三种管料按照 2：4：1 的比例配套，问如何下料才能使残料最少？

案例 14 经济配料问题

某饲养场有 5 中饲料，已知各种饲料的单位价格和每百公斤饲料的蛋白质、矿物质、维生素含量如表，又知该饲养场每日至少需蛋白质 70 单位，矿物质 3 单位，维生素 10 单位，问如何混合调配 5 种饲料，能使总成本最低？

<table>
<tr><td rowspan="2">饲料种类</td><td colspan="3">有关成分</td><td rowspan="2">饲料单价
（百公斤）</td></tr>
<tr><td>蛋白质</td><td>矿物质</td><td>维生素</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.30</td><td>0.1</td><td>0.05</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2.20</td><td>0.05</td><td>0.10</td><td>7</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1.00</td><td>0.02</td><td>0.02</td><td>4</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.60</td><td>0.20</td><td>0.20</td><td>3</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1.80</td><td>0.05</td><td>0.08</td><td>5</td></tr>
</table>

案例 15 特征值与特征向量的应用

1. 设某校午餐有 A、B 两种便当选择，经统计数据显示，今天订 A 便当的人，隔天再订 A 便当的机率是$\frac{3}{5}$；订 B 便当的人，隔天再订 B 便当的机率为$\frac{4}{5}$，已知星期一有 40%的同学订了 A 便当，60%的同学订了 B 便当，求星期四时订 A 便当同学的比率.

2.一实验室培养两种菌，令$\{a_n\}$和$\{b_n\}$分别代表两种培养菌在时间点 n 的数量，彼此有如下的关系 $a_{n+1}=2(a_n+b_n),b_{n+1}=2b_n(n=0,1,2\cdots)$，若二阶矩阵 A=$\begin{bmatrix} a & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix}$满足$\begin{bmatrix} a_{\mathrm{n+b}} \\ \mathrm{c}_{\mathrm{n+3}} \end{bmatrix}$= A$\begin{bmatrix} a_n \\ \mathrm{b}_{\mathrm{n}} \end{bmatrix}$，求 $a=$______，$b=$______，$c=$______，$d=$________。

3.假设某地只有甲乙两家工厂生产并贩卖某一种产品每一年甲工厂的顾客中有$\frac{3}{4}$转向乙工厂购买此产品，只有$\frac{1}{4}$仍然向甲工厂购买；而乙工厂的顾客中有$\frac{1}{3}$转向甲工厂购买，其余$\frac{2}{3}$的顾客仍然向乙工厂购买，请问一年、二年、三年后，甲乙两家工厂的市场占有率为何？