# 证　明

兹证明张雪霞主编的《高等数学（上下册）》（2018 年 8 月，北京邮电大学出版社，书号分别为 ISBN978-7-5635-5481-2、978-7-5635-5482-9）教材，2018 年开始被我校理工科专业使用。

特此证明。

太原科技大学教务部

2021 年 5 月 10 日

国家新闻出版改革发展项目库入库项目

普通高等教育信息科技类通识基础创新型规划教材

# 高等数学

## （上）

GAODENG SHUXUE

主 编 张雪霞

"互联网+"创新型教材

北邮智信

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

## 内容简介

本书是根据国家教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》,结合编者多年的教学经验及教改成果编写而成的.本书分上、下两册.主要内容包括:函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程.本书对基本概念的叙述清晰准确,对基本理论的论述简明易懂,例题习题的选配典型多样,强调基本运算能力的培养及理论的实际应用.每章配有习题,书末附有习题参考答案,便于学生学习.

本书是基于"互联网+"的立体化创新型教材,借助APP平台,提供每章重点和难点的微课、疑难解析、课程纲要等内容,方便教与学.本书可作为高等学校理工科各专业的高等数学教材,也可作为相关教师和工程技术人员的参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学.上/张雪霞主编.—北京:北京邮电大学出版社,2018.8
ISBN 978-7-5635-5481-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第141891号

书　　名　高等数学(上)
主　　编　张雪霞
责任编辑　张保林
出版发行　北京邮电大学出版社
社　　址　北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真　010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址　www.buptpress3.com
电子信箱　ctrd@buptpress.com
经　　销　各地新华书店
印　　刷　北京泽宇印刷有限公司
开　　本　787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张　18.5
字　　数　472千字
版　　次　2018年8月第1版　2018年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-5481-2　　定价:48.00元

# 目 录

国家新闻出版改革发展项目库入库项目
普通高等教育信息科技类通识基础创新型规划教材

# 高等数学

## （下）

GAODENG SHUXUE

主 编 张雪霞

"互联网+"创新型教材
北邮智信

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

## 内容简介

本书是根据国家教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，结合编者多年的教学经验及教改成果编写而成的．本书分上、下两册．主要内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程．本书对基本概念的叙述清晰准确，对基本理论的论述简明易懂，例题习题的选配典型多样，强调基本运算能力的培养及理论的实际应用．每章配有习题，书末附有习题参考答案，便于学生学习．

本书是基于"互联网＋"的立体化创新型教材，借助 APP 平台，提供每章重点和难点的微课、疑难解析，课程纲要等内容，方便教与学．本书可作为高等学校理工科各专业的高等数学教材，也可作为相关教师和工程技术人员的参考书．

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学．下/张雪霞主编．-- 北京：北京邮电大学出版社，2018.8

ISBN 978－7－5635－5482－9

Ⅰ．①高… Ⅱ．①张… Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 141893 号

| | |
|---|---|
| 书　　名 | 高等数学(下) |
| 主　　编 | 张雪霞 |
| 责任编辑 | 张保林 |
| 出版发行 | 北京邮电大学出版社 |
| 社　　址 | 北京市海淀区西土城路 10 号(100876) |
| 电话传真 | 010－82333010　62282185(发行部)　010－82333009　62283578(传真) |
| 网　　址 | www.buptpress3.com |
| 电子信箱 | ctrd@buptpress.com |
| 经　　销 | 各地新华书店 |
| 印　　刷 | 北京泽宇印刷有限公司 |
| 开　　本 | 787 mm×1 092 mm　1/16 |
| 印　　张 | 16.5 |
| 字　　数 | 419 千字 |
| 版　　次 | 2018 年 8 月第 1 版　2018 年 8 月第 1 次印刷 |

ISBN 978－7－5635－5482－9

定价：45.00 元

# 目　录

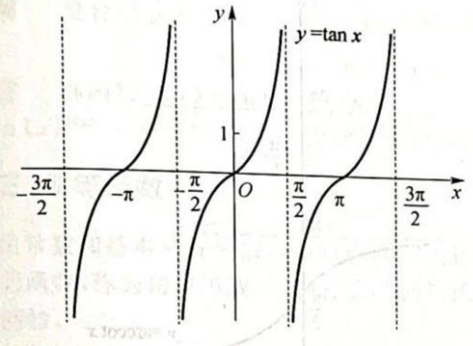



图 1.15

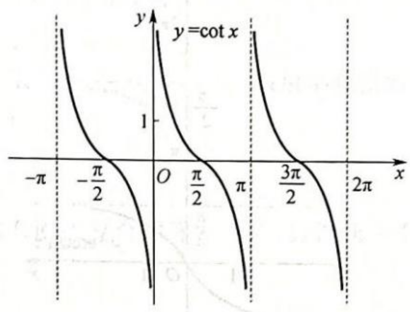



图 1.16

### 5. 反三角函数

三角函数的反函数称为**反三角函数**. 由于三角函数都是周期函数,故反三角函数都是多值函数. 我们按照下列区间取其一个单值分支,称为主值区间.

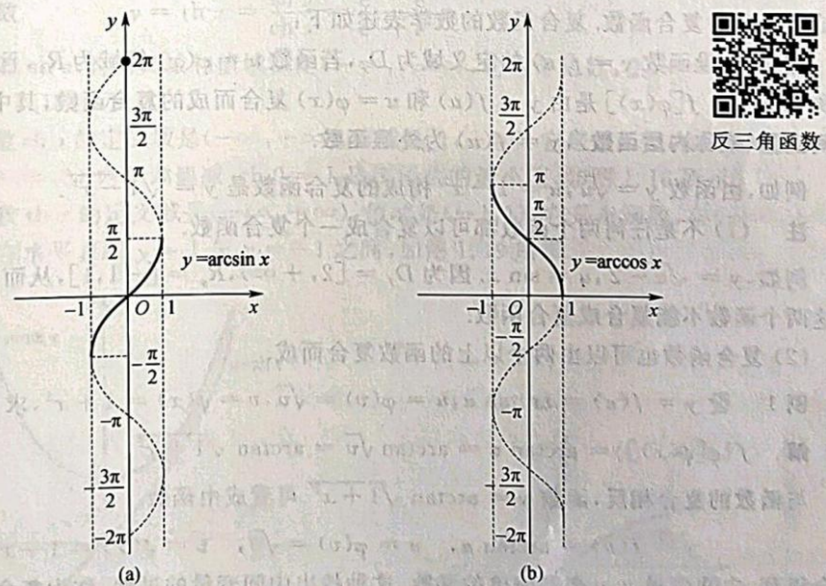
$$y = \arcsin x,\quad -1 \leqslant x \leqslant 1,\quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$y = \arccos x,\quad -1 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant \pi;$$

$$y = \arctan x,\quad -\infty < x < +\infty,\quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2};$$

$$y = \operatorname{arccot} x,\quad -\infty < x < +\infty,\quad 0 < y < \pi.$$

其中 $\arcsin x$,$\arctan x$ 均是单调递增的,$\arccos x$,$\operatorname{arccot} x$ 均是单调递减的,且均为有界函数(见图 1.17).



双曲函数 $y = \operatorname{sh} x, y = \operatorname{ch} x (x \geqslant 0), y = \operatorname{th} x$ 的反函数依次记为

$$\text{反双曲正弦} \quad y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

$$\text{反双曲余弦} \quad y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1});$$

$$\text{反双曲正切} \quad y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

反双曲正弦函数 $\operatorname{arsh} x$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，它是奇函数，在区间$(-\infty, +\infty)$上是单调递增的，如图 1.20 所示. 反双曲余弦函数 $\operatorname{arch} x$ 的定义域为$[1, +\infty)$，函数在定义域上单调递增，如图 1.21 所示. 反双曲正切函数 $\operatorname{arth} x$ 的定义域为$(-1,1)$，它是奇函数，在区间$(-1,1)$上是单调递增的，如图 1.22 所示.

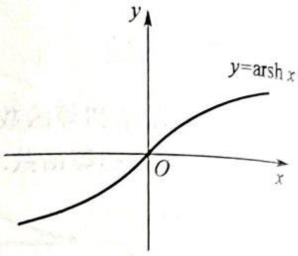



图 1.20

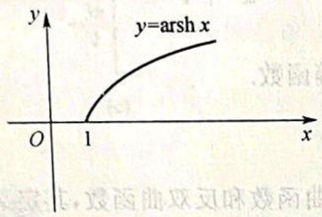



图 1.21

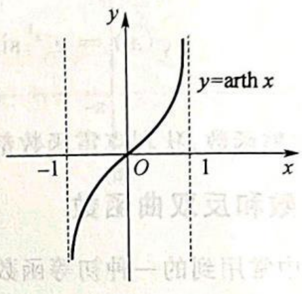



图 1.22

## 五、函数的参数表示和极坐标表示

前面我们讨论的函数都是在平面直角坐标系中，将因变量 $y$ 直接表示为自变量 $x$ 的函数 $y = f(x)$. 然而在许多问题的研究中，有时需要通过另一变量(称为参变量)来建立变量 $x$ 和 $y$ 之间的关系，或者在极坐标系下来建立函数关系更为方便.

### 1. 函数的参数表示

在有些运动变化过程中，把因变量 $y$ 和自变量 $x$ 直接建立关系是比较困难的. 有时我们可以根据运动规律，引入另一变量 $t$，分别建立 $x$ 与 $t$ 以及 $y$ 与 $t$ 的函数关系：$x = x(t)$，$y = y(t)$，从而把 $y$ 与 $x$ 的函数关系通过变量 $t$ 间接地表示为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

(1.1)式称为 $y$ 与 $x$ 的函数关系的**参数表示式**. 显然，它也是这个函数所表示曲线的方程，称为此曲线的参数方程. 其中 $t$ 称为**参变量**，也称为**参数**.

**例 3(摆线方程)** 一火车在直线轨道上行驶，若车轮在直线轨道上无滑动地滚动，则称车轮边缘上任一确定点的运动轨迹为**摆线**或**旋轮线**. 试建立它的方程.

**解** 选取平面直角坐标系使直线轨道为 $x$ 轴，调整车轮的位置，使运动开始时点 $P$ 正好是车轮与轨道的切点，并取此切点为坐标原点 $O$(见图 1.23). 此时，点 $P$ 与点 $O$ 重合，轮心 $C$ 与切点 $P$ 的连线 $CP$ 与轨道垂直. 车轮滚动时，点 $P$ 在摆线上运动. 当车轮转动了圆心角 $t$，即 $CP$ 与 $CN$ 的夹角为 $t$ 时，点 $P$ 的坐标设为$(x,y)$，要求摆线的方程，就是要求点 $P$ 的坐标 $x$ 与 $y$ 满足的关系式. 这里要把 $x$ 与 $y$ 直接建立联系是比较困难的，我们可以把它们通过转角 $t$ 来间接建立联系. 设车轮半径为 $a$，在图 1.23 中注意到车轮滚动中，长度 $ON$ 等于弧长$\overset{\frown}{NP}$，易见

与有序数组之间的一一对应关系. 由于点按照一定的规律就形成了曲线,相应的数组所满足的条件就形成了方程. 从而就可以通过方程用解析的方法来研究曲线,也可以利用曲线的几何直观来认识方程. 所以关键在于建立点与有序数组之间的一一对应关系. 建立这种对应关系除了笛卡儿直角坐标系外,还有一些其他的坐标系,其中常见的一种就是下述的极坐标系.

在平面上选取一条具有起始点 $O$(称为**极点**) 和单位长度的射线 $Ox$(称为**极轴**),这样在此平面就建立了**极坐标系**. 对平面上任意一点 $P$,将线段 $OP$ 的长度记为 $\rho$,称为**极径**,极轴 $Ox$ 到射线 $OP$ 的转角记为 $\theta$,称为**极角**. 如果限制 $\theta \in [0,2\pi)$,$\rho \geqslant 0$,那么平面上除极点 $O$ 外任一点 $P$ 便有唯一的有序数组 $(\rho,\theta)$ 与其对应;反之任给一数组 $(\rho,\theta)$,以 $\theta$ 为极角,$\rho$ 为极径,必有唯一的点与之对应. 因此我们把 $(\rho,\theta)$ 称为点 $P$ 的**极坐标**.

有时为了方便,也可将 $\theta$ 限制在区间 $[-\pi,\pi)$ 中. 例如点 $\left(1,\dfrac{5\pi}{4}\right)$(见图 1.24),也可表示为 $\left(1,-\dfrac{3\pi}{4}\right)$. 特别地,极点 $O$ 对应于 $\rho=0$ 而极角 $\theta$ 不确定.

在极坐标系中,$\rho=R$($R$ 为常数) 表示圆心在极点 $O$,半径为 $R$ 的圆周;$\theta=\theta_0$ 表示从极点 $O$ 出发,转角为 $\theta_0$ 的射线;$\rho=2R\cos\theta$($R$ 为常数) 表示圆心在 $(R,0)$,半径为 $R$ 的圆周;$\rho=2R\sin\theta$($R$ 为常数) 表示圆心在 $(0,R)$,半径为 $R$ 的圆周.

如果以极点 $O$ 为原点,极轴 $Ox$ 为 $x$ 轴正向建立直角坐标系,那么点 $P$ 的直角坐标 $(x,y)$ 与极坐标 $(\rho,\theta)$ 之间显然有如下关系(见图 1.25):

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{1.3}$$

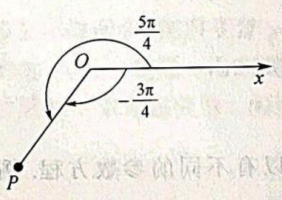



图 1.24

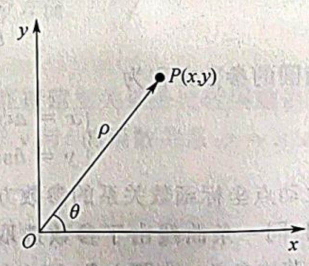



图 1.25

利用上述直角坐标和极坐标的转化公式,我们可以根据需要,把直角坐标系下给出的函数关系或方程,转化为极坐标形式,也可以把极坐标系下给出的函数关系或方程,转化为直角坐标形式.

**例 5** 将方程 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 转化为极坐标方程,并画出它的草图.

**解** 将公式(1.2) 代入方程,得

$$\rho^4=2a^2\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta),$$

即

$$\rho^2=2a^2\cos 2\theta. \tag{1.4}$$

由方程(1.4) 易见,由于 $\cos 2\theta$ 关于 $\theta$ 是偶函数,故此方程的图像关于极轴对称;又由于将

由 $\left|\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant 1$，$\left|\sin\dfrac{\Delta x}{2}\right|\leqslant\left|\dfrac{\Delta x}{2}\right|$，得

$$|\Delta y|\leqslant 2\cdot 1\cdot\left|\frac{\Delta x}{2}\right|=|\Delta x|,$$

因此，当 $\Delta x\to 0$ 时，由夹逼准则得 $\Delta y\to 0$，由于 $x$ 是任意的，故 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

类似地可以证明 $y=\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

**例 2**　已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ 2x-a, & x\geqslant 0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，求 $a$ 的值.

**解**　因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+1)=1,$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x-a)=-a,$$

而 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x),$$

即 $a=-1$.

## 二、函数的间断点及其分类

间断点的定义

**定义 7**　设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某一去心邻域内有定义，如果 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处不连续，则称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处**间断**，或称点 $x_0$ 为 $f(x)$ 的**间断点**.

由函数的连续性定义可知，若函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某一去心邻域内有定义并且满足下列 3 个条件之一，则点 $x_0$ 为函数的间断点：

函数间断点的分类和举例

(1) $f(x)$ 在点 $x_0$ 处无定义；

(2) $f(x)$ 在点 $x_0$ 处有定义，但极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

(3) $f(x)$ 在点 $x_0$ 处有定义，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

间断点常发生在初等函数无定义的点或分段函数的分界点处. 通常将函数的间断点按其左、右极限是否存在分为两类.

**定义 8**　设 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点.

(1) 若左极限 $f(x_0-0)$ 与右极限 $f(x_0+0)$ 都存在，则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的**第一类间断点**.

① 当 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ 时，称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的**可去间断点**；

② 当 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ 时，称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

(2) 若左极限与右极限中至少有一个不存在，则称点 $x_0$ 为 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

常见的第二类间断点有**无穷间断点**（$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$）和**振荡间断点**（在 $x\to x_0$ 过程中，函数值 $f(x)$ 无限振荡，极限不存在）.

**例 3**　正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处没有定义，故点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是函数 $\tan x$ 的间断点. 又因 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，故称 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为函数 $\tan x$ 的无穷间断点.

于判断方程根的存在性.

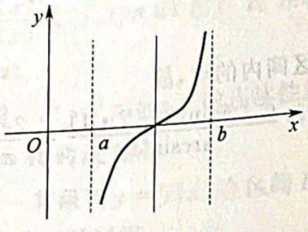



图 1.41

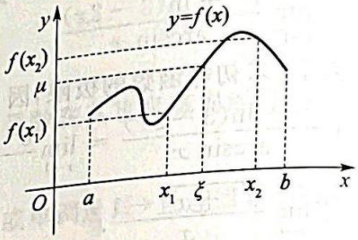



图 1.42

**例 5** 证明：方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

**证** 设函数 $f(x)=x^3-4x^2+1$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且

$$f(0)=1>0,\quad f(1)=-2<0.$$

根据零点定理，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $f(\xi)=0$，即

$$\xi^3-4\xi^2+1=0\quad(0<\xi<1).$$

这说明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

求极限方法小结

## 习题 1.10

1. 求 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-3}f(x)$，$\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

2. 求 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 3-x, & 2<x\leqslant 3\end{cases}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

3. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性.

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{1+x+e^x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to1}\arctan\dfrac{1}{x}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\sin\frac{1}{x}}$；

(4) $\lim\limits_{x\to1}\ln\dfrac{x^2-1}{x-1}$；　(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{8\cos^2x-2\cos x-1}{2\cos^2x+\cos x-1}$；　(6) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

5. 证明：方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

6. 证明：方程 $x=2+\sin x$ 至少有一个不超过 3 的正根.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$. 证明：至少存在一点 $\xi\in[0,a]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

## 总习题一

第一章内容提要

1. 在"充分""必要""充分必要"三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) 数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的______条件，数列 $\{x_n\}$ 收敛是数列 $\{x_n\}$ 有界的______条件.

(2) $f(x)$ 在 $x_0$ 的某一去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的______条件，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在

解　原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^{n}}=0.$

**例 6**　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$（$n$ 为正整数,$\lambda>0$）.

解　重复应用洛必达法则 $n$ 次,得

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0.$

注　对数函数 $\ln x$、幂函数 $x^n$、指数函数 $e^{\lambda x}(\lambda>0)$ 均为当 $x\to+\infty$ 时的无穷大,但它们增大的速度却不同,其增大速度比较:

$$对数函数 \ll 幂函数 \ll 指数函数.$$

**例 7**　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}$.

洛必达法则使用条件

解　注意到 $\tan x\sim x$,则有

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\sec^2 x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\\&=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

注　洛必达法则虽然是求未定式的一种有效方法,但在求未定式时,应首先考虑对函数化简,或应用等价无穷小替换或使用重要极限,这样运算才可能简捷.

**例 8**　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x-\sin 3x}{(1-\cos x)\ln(1+2x)}$.

“0·∞”和“∞−∞”未定式

解　当 $x\to0$ 时,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$\ln(1-2x)\sim 2x$,因此

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{3-3\cos 3x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin 3x}{2x}=\frac{9}{2}.$$

**例 9**　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

解　$$原式=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{0}{1}=0.$$

未定式常犯错误

## 二、其他类型的未定式

除了常见的 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 类型的未定式外,我们也会碰到形如 $0\cdot\infty$,$\infty-\infty$,$0^0$,$1^\infty$,$\infty^0$ 类型的未定式.一般地,

(1) 对于 $0\cdot\infty$ 型,可将乘积化为商的形式,即化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的未定式来计算.

(2) 对于 $\infty-\infty$ 型,可利用通分化为 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定式来计算.

(3) 对于 $0^0$,$1^\infty$,$\infty^0$ 型,可先化以 e 为底的指数函数的极限,若指数为 $0\cdot\infty$ 的形式,可再

平面的夹角(见图 7.44). 当直线与平面垂直时,规定直线与平面的夹角为$\frac{\pi}{2}$.

设直线 $L$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$,平面 $\Pi$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$,直线 $L$ 与平面 $\Pi$ 的夹角为 $\varphi$,即 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 $\theta$ 为 $\frac{\pi}{2}-\varphi$ 或 $\frac{\pi}{2}+\varphi$,又因为

$$\sin\varphi=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right|=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right|,$$

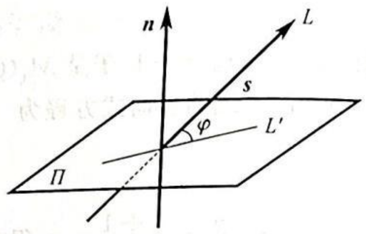


图 7.44

即

$$\sin\varphi=|\cos\theta|,$$

所以

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}})|=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \tag{7.28}$$

(7.28) 式即为确定直线 $L$ 与平面 $\Pi$ 的夹角公式.

空间直线 $L$ 与平面 $\Pi$ 的位置关系有且仅有两种情形:相交或平行.

空间直线 $L$ 与平面 $\Pi$ 的位置关系的判别:

(1) $L$ 与 $\Pi$ 相交 $\Leftrightarrow Am+Bn+Cp\neq 0$;

特别地,$L\perp\Pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\,/\!/\,\boldsymbol{n}\Leftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$;

直线与平面夹角

(2) $L\,/\!/\,\Pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$.

**例 4** 求过点 $P(1,1,1)$ 且与直线 $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$ 垂直相交的直线方程.

**解** 直线 $L$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t,\\ y=-4t,\\ z=-3+t\end{cases}$ 它的一个方向向量 $\boldsymbol{s}=\{1,-4,1\}$,所求直线与直线 $L$ 的交点坐标可设为 $A(1+t_0,-4t_0,-3+t_0)$,则 $\overrightarrow{PA}=\{t_0,-4t_0-1,-4+t_0\}$ 就是所求直线的一个方向向量,于是由题意有 $\overrightarrow{PA}\perp\boldsymbol{s}$,即有

$$\{t_0,-4t_0-1,-4+t_0\}\cdot\{1,-4,1\}=0,$$

从而

$$t_0-4(-4t_0-1)+(t_0-4)=0,$$

直线与平面的位置关系

解得 $t_0=0$,于是 $\overrightarrow{PA}=\{0,-1,-4\}$,故所求直线方程为

$$\begin{cases}x-1=0,\\ \frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-4}.\end{cases}$$

**注** 此题也可先求出过点 $P$ 且垂直直线 $L$ 的平面 $\Pi$ 的方程,再求已知直线与平面 $\Pi$ 的交点坐标,即为所求直线与已知直线的交点坐标.

## 五、直线外一点到直线的距离公式

设 $M_0$ 是直线 $L$ 外一点,欲求点 $M_0$ 到直线 $L$ 的距离,一般先过 $M_0$ 作一与直线 $L$ 垂直的平面 $\Pi$,再求出直线 $L$ 与平面 $\Pi$ 的交点 $M_1$,最后求出点 $M_0$ 与点 $M_1$ 的距离 $d$,$d$ 即为点 $M_0$ 到直线 $L$ 的距离(见图 7.45(a)).

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-a(x)y+b(x),$$

两边同乘$\frac{1}{y}\mathrm{d}x$，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\left(-a(x)+\frac{b(x)}{y}\right)\mathrm{d}x,$$

两边取积分，得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\left(-a(x)+\frac{b(x)}{y}\right)\mathrm{d}x,$$

于是得到

$$y=\pm\,\mathrm{e}^{\int\left(-a(x)+\frac{b(x)}{y}\right)\mathrm{d}x}=\pm\,\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x+\int\frac{b(x)}{y}\mathrm{d}x}=\pm\,\mathrm{e}^{\int\frac{b(x)}{y}\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}.$$

这时只需求出$\pm\,\mathrm{e}^{\int\frac{b(x)}{y}\mathrm{d}x}$即可得到方程(12.11)的解，令$\pm\,\mathrm{e}^{\int\frac{b(x)}{y}\mathrm{d}x}=u(x)$，则方程(12.11)的解形如

$$y=u(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}, \tag{12.14}$$

可知(12.14)式就是将(12.13)式中的任意常数$C$换成了函数$u(x)$，这种变换称为常数变易法.

接下来，只需求出$u(x)$就能得到方程(12.11)的解，因为(12.14)式为方程(12.11)的解，则将其代回方程(12.11)得

$$u'(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}+u(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}(-a(x))+a(x)u(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}=b(x),$$

即

$$u'(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}=b(x),$$

所以

$$u'(x)=b(x)\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x},$$

一阶线性微分方程

于是

$$u(x)=\int b(x)\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C,$$

则得到方程(12.11)的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\left(\int b(x)\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right), \tag{12.15}$$

(12.15)式可写成两项的和

$$y=C\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\int b(x)\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

上式的第一部分$C\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}$恰好为方程(12.11)对应的齐次形式通解，而第二部分为$C=0$时，方程(12.11)的特解，即方程(12.11)的通解可以由对应齐次形式的通解加上本身的一个特解组成，在后面还会对线性微分方程解的形式进行讨论.

**例 1** 求解方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\mathrm{e}^x$满足$y\big|_{x=0}=0$的特解.

**解** 这是一阶线性方程，先求对应齐次的形式$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$的通解，分离变量并取积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int\mathrm{d}x,$$