高 等 数 学 教 学 案 例

汇　　编

二零二三年七月

目　录

第一章　函数与极限 1
第 1 节　函数 1
第 2 节　极限 5
第二章　导数与微分 10
第 1 节　导数 10
第 2 节　函数的微分 12
第 3 节　瞬时变化率 14
第 4 节　函数的单调性 17
第 5 节　函数的极值与最值 18
第 6 节　高阶导数 28
第 7 节　误差 31
第 8 节　微分中值定理的工程背景 32
第三章　定积分 33
第 1 节　求总量 33
第 2 节　微积分基本公式 35
第 3 节　换元积分法 42
第 4 节　分部积分法 44
第 5 节　平面图形的面积 46
第 6 节　立体的体积 47
第 7 节　平面曲线的弧长 47
第 8 节　变力沿直线所作的功 48
第 9 节　压力与引力 50
第 10 节　函数的平均值 52
第四章　微分方程 55
第 1 节　可分离变量的微分方程 55
第 2 节　一阶线性微分方程 63
第 3 节　可降阶的微分方程 67
第 4 节　二阶常系数线性微分方程 70
第五章　空间解析几何 72
第 1 节　几何应用 72
第 2 节　向量问题 74
第六章　多元函数微分学 76
第 1 节　多元函数的最值 76

第 2 节　偏导数 78
第 3 节　方向导数与梯度 79
第七章　多元函数积分学 83
第 1 节　二重积分解决实际问题 83
第 2 节　多元函数积分在物理上的应用 86
第八章　级数 88
第 1 节　无穷级数的概念 88
第 2 节　傅里叶级数 90
第 3 节　杂例 94

第一章　函数与极限

第1节　函数

案例 1［自由落体运动方程］在自由落体运动中，物体下落的距离 S 随下落时间 t 的变化而变化，下落距离 S 与时间 t 之间的函数关系为

$$S=\frac{1}{2}gt^2,\ \text{其中 g 为重力加速度.}$$

案例 2［股票曲线］股票在某天的价格和成交量随时间的变化常用图形表示，下图为某一股票在某天的走势图.

从股票曲线，我们可以看出这只股票当天的价格和成交量随时间的波动情况.

案例 3［物理实验］设某一物理现象的数学关系为 $y=\varphi(t)$，用实验测得 t_i 时刻 $y=\varphi(t_i)$ 的值，见下表.

t	0	t_1	t_2	……	t_m
$\varphi(t)$	φ_0	φ_1	φ_2	……	φ_m

案例 4［生产利润］ 某一玩具公司生产 x 件玩具将花费 $400+5\sqrt{x(x-4)}$ 元，如果每件玩具卖 48 元，那么公司生产 x 件玩具获得的净利润是多少？

解：经过简单的分析，可以得到该公司生产 x 件玩具获得的净利润 y 为

$$y=48x-400+5\sqrt{x(x-4)}.$$

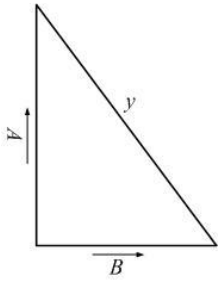
案例 5 ［生产费用］某工厂生产计算机的日生产能力为 0 到 100 台，工厂维持生产的日固定费用为 4 万元，生产一台 计算机的直接费用(含材料费和劳务费)是 4250 元．试建立该厂日生产 x 台计算机的总费用函数，并指出其定义域.

解：设该厂日生产x台计算机的总费用为y（单位：元），则y为日固定费用和生产x台计算机所需总费用之和，即

$$F(x)=40000+4250x,$$

由于该厂每天最多能生产100台计算机，所以定义域为$\{x\,|\,0\le x\le 100, x\in N\}$.

案例6［飞行距离］一架飞机A中午12时从某地以400公里/小时的速度朝北飞行，一小时后，另一架飞机B从同一地点起飞，速度为300公里/小时，方向朝东．如果两架飞机飞行高度相同，不考虑地球表面的弧度和阻力．问这两架飞机在时刻t(飞机B起飞的时刻为0)相距多远？



解： 设两架飞机在t时刻相距$y$km，由于两架飞机分别向北向东飞行，所以t时刻两架飞机所在地点的连线和各自飞行的路线组成一个直角三角形，如右图所示．t时刻飞机B飞行的距离为$300t$，飞机A早出发1小时，飞行的距离为$400(t+1)$，由勾股定理，有

$$y=\sqrt{400^2(t+1)^2+300^2t^2}\ ，\text{其中}\ t\ge 0.$$

案例7［汽车租赁］一汽车租赁公司出租某种汽车的收费标准为每天的基本租金200元加每公里收费15元.

(1) 试建立租用一辆该种汽车一天的租车费（单位：元）与行车路程x（单位：km）之间的函数关系；

(2) 若某人某天付了400元租车费，问他开了多少km?

解： (1)设租用一辆该种汽车一天的租车费为y（单位：元），则y为每天的基本租金200元和当天行车x公里所收费用$15x$之和，即

$$y=200+15x.$$

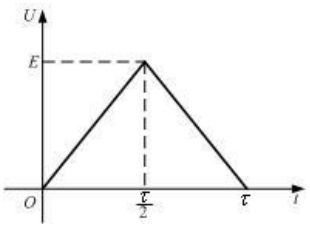
(2)将400代入上式，得

$$400=200+15x,$$

解之，得$x\approx 13.3$ (公里) .

案例8［单三角脉冲］脉冲器产生一个单三角脉冲，其波形如下图所示，电压U与时间$t(t\ge 0)$的函数关系式为一分段函数

$$U=\begin{cases}\dfrac{2E}{\tau}t, & t\in[0,\dfrac{\tau}{2}]\\ -\dfrac{2E}{\tau}(t-\tau), & t\in[\dfrac{\tau}{2},\tau]\\ 0, & t\in(\tau,+\infty)\end{cases}.$$



案例 9［个人所得税］我们知道，当个人的月收入超过一定金额时，应向国家交纳个人所得税，收入越高，国家征收的个人所得税的比例也越高．即“高收入，高税收”．我国于 1993 年 10 月 31 日发布的《中华人民共和国个人所得税法》规定月收入超过 800 元的部分为应纳税所得额（下表仅保留了原表中前 2 级 的税率）．

级 数	全 月 应 纳 税 所 得 额	税 率 (%)
1	不超过 500 元部分	5
2	超过 500 元至 2000 元部分	10

个人所得税一般在工资中直接扣发.若某单位所有人的月收入都不超过 2800 元，请建立月收入与纳税金额之间的函数关系．

解：设某人月收入为 x 元，应交纳所得税为 y 元．

当 $0 \le x \le 800$ 时，　$y = 0$；

当 $800 < x \le 1300$ 时，$y = (x - 800) \times 5\%$；

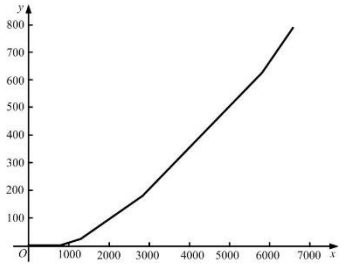
当 $1300 < x \le 2800$ 时，

$$y = (1300 - 800) \times 5\% + (x - 1300) \times 10\% = 25 + (x - 1300) \times 10\%,$$

故函数关系为

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 800 \\ 0.05 \times (x - 800), & 800 < x \le 1300 \\ 0.1 \times (x - 1300) + 25, & 1300 < x \le 2800 \end{cases}.$$

函数图形如下图所示．



若某人月工资为 1850 元，则应使用公式

$$y = 0.1(x - 1300) + 25$$

求值，所交税为

$$y\big|_{x=1850} = 0.1 \times 550 + 25 = 80$$

案例 10［旅馆定价］一旅馆有 200 间房间，如果定价不超过 40 元/间，则可全部出租．若每间定价高出 1 元，则会少出租 4 间．设房间出租后的服务成本费为 8 元，试建立旅馆一天的利润与房价间的函数关系．

解： 设旅馆的房价为 x 元/间，旅馆一天的利润为 y 元．

若 $x \le 40$，则旅馆出租 200 间，利润为 $y = 200(x-8)$．

若 $x > 40$，则旅馆少出租 $4(x-40)$ 间，出租了 $200-4(x-40)$ 间．利润为

$$y = [200-4(x-40)](x-8).$$

综上分析，旅馆利润与房价之间的函数为

$$y = \begin{cases} 200(x-8), & x \le 40 \\ [200-4(x-40)](x-8), & x > 40 \end{cases}.$$

如果旅馆房价为 45 元/间，则应用公式 $y = [200-4(x-40)](x-8)$ 求值，

旅馆一天的利润为 $y = (200-4\times 5)\times(45-8) = 6660$（元）．

案例 11［出租车费用］当人们乘坐出租车的时候总是在思考一个问题，当距离较远时，选择乘坐一辆或者多辆出租车时费用上有何差别?如何换乘，所花费用最少?某地 2014 年出租车的计费标准如下：

（1） 路 程 3km 以内(含 3km)按起步价 9 元计费；

（2）超过 3km,但不超过 10km 的这段路程，按 1.9 元/km 计费；

（3）超过 10km 后的路程需加收 50%的返空费，即按 2.85 元/km 计费；

(4）等待累计时间(如遇红灯、中途停车等)不满 5 分钟不收费，若满 5 分钟，按每 5 分钟 1km 计费。

按上述标准计算出的费用取整数为现实中最终支付费用。现假设乘客换车很方便且不考虑等待时间，请制订一个费用最省的乘车方案?

解：设当行驶 x 公里时，乘客乘车费用为 $f(x)$ 元，则有分段函数

(1)当乘车路程在 3km 之内时，在起步价之内，只乘一辆车最省，总费用是 9 元。

(2)当乘车路程在 3～10km 之内时，平均每 km 路费随着 路程的增加而逐渐降低，从 3km 时的平均 3 元/km 到 1 0km 时 的平均 2.23 元/km，故只乘一辆车最省。

(3)当乘车路程超过 10km 时，若不换乘则按 2.85 元/km 计费，若换乘，则需支付起步价 9 元。

设当行驶至y (10<y≤20)km时，不换乘与换乘两种方案的费用相等，则有

$2.85\times(y-10)=9+1.9\times(y-13)$ （$10<y\le 20$）

解之得$y\approx 13.5$，即每辆车的乘坐时间如果超过了13.5km,则选择换乘另一辆车费用最省。

故当乘车路程超过10km 且小于13.5km 时，只乘一辆车费用最省。

当乘车路程超过13.5km 且不超过23.5km 时，在行驶至10km 时换乘另一辆车费用最省。

(4)当乘车路程超过23.5km 且不超过33.5km 时，在行驶 至10km 、20km 时分别换乘另一辆车费用最省。如果距离继续 增加，换乘方案依此类推。

例如，如果乘客从甲地到乙地共23km，两种方案分别花 费多少?

方案一：不换乘

总花费：9+1.9×7+2.85×(23-10)=59.35≈59(元)

方案二：10km 处换乘

总花费： 2×(9+1.9×7)+3×2.85=53.15≈53(元)

方案二比方案一总花费节省了6元。

第2节 极限

案例1[存款利息]设某人有本金A 元， 假设银行的存款方式只有两种：一年定期和活期，现行利率表如下表所示.

存款方式	利率(年利率)
活 期	0.0072
一年定期	0.0198

如果国家公布的个人所得税为20% ，问：

(1) t年末，此人的本利和最多为多少？$t\to+\infty$天后的本利和最多为多少？

(2) 若某人有2000元钱，准备在银行存4年，请计算他的本利和. 若存800天，本利和最多又为多少？

解 1. 问题假设

设活期的年利率为r_1，一年定期的年利率为r_2，本利和为y．为简化问题，便于建立模型，特做以下合理化的简化假设：

(1) 存款期间银行的利率政策和国家公布的个人所得税等不变，中途没有追加存款和提前支取；(2) 一年有 365 天．

2. 模型的建立

由于要交所得税，故实际活期年利率为$0.8r_1$，一年定期的年利率为$0.8r_2$．由于$r_1 < r_2$，所以获得最高利息的存款方式为尽量存定期．

(1)当存款时间t为整年时，本利和y与存款时间n之间的函数关系为

$$y = A(1+0.8r_2)^n .$$

(2) 当存款时间t不为整年时，可以存$n=[\frac{t}{365}]$个一年定期，剩余的$(t-365n)$天存活期．这样，第$n=[\frac{t}{365}]$年末的本利和为$y = A(1+0.8r_2)^n$，以它为本金，再存$(t-365n)$天，得到t天后的本利和y．由于活期的年利率为r_1，折算为每天的利率为$r_3=\frac{r_1}{365}$，故t天后的本利和y为

$$y = A(1+0.8r_2)^{[\frac{t}{365}]}(1+0.8r_3\times 365\times \mathrm{mod}(\frac{t}{365}))$$

其中，$\mathrm{mod}(\frac{t}{365})$是$\frac{t}{365}$的模，其值为$\mathrm{mod}(\frac{t}{365}) = 365\times(\frac{t}{365}-[\frac{t}{365}])$.

3．模型的求解

若某人有 2000 元钱，存 4 年，本利和为

$$y = 2000\times(1+0.8\times 0.0198)^4 = 2130.6\,(\text{元})$$

若存$t=800$天，则先存 2 年定期，再存 70 天的活期，本利和为

$$y = 2000\times(1+0.8\times 0.0198)^2(1+0.8\times\frac{0.0072}{365}\times 70)$$

$$=2064.2\times 1.0014 = 2067.09\ \ (\text{元})$$

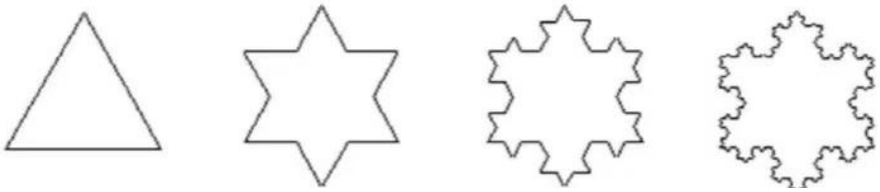
案例 2［投资收益］假定有一个人想把手中的余钱拿去投资，假如投资收益的年利率为 100%,那么当他投资 1 万元，他将收益 2 万元。如果投资有复利计算，比如每个月都计利一次，那么他到年末将有$(1+\frac{1}{12})^{12}$万元。如果按每年n次复利计算，则每年末他将有多少万元?当n无限增大时，他的收益会无限多吗?

解：如果按每年n次复利计算，则年末将有$(1+\frac{1}{n})^n$万元，因$(1+\frac{1}{n})^n$随 n 增大，

单调递增，但有上界：$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e < 3$

所以，当 n 无限增大时，他的收益也不会超过 3 万元，因而他的收益也不会无限增多。实际上只能无限接近于 2.71828……万元。

案例 3 [科契雪花]1904 年，瑞典数学家黑尔格·冯·科赫 (Helge von Koch) 构造了现在以他的名字命名的“Koch 雪花”。 先画一个边长为 1 的等边三角形，再进行如下修改。第一步：将等边三角形的每条边三等分，并以中间的一段为边向外画等边三角形，再去掉被三等分的边的中间的一段，这样就形成了一个具有 3×4 条边的多边形。第二步：将新多边形的每条边三等分后重复以上的过程，这样就形成了一个具有 3×4^2 条边的多边形。重复以上步骤到第 n 步时，得到一个 3×4^n 条边的多边形。当 n 越来越大时，新多边形的的边缘越来越精细，看上去越来越像一朵美丽的雪花，故名“Koch 雪花”,又名“Koch 曲线”,如下图所示。请问随着 Koch 雪花边数的增加，其周长和面积如何变化?



解：设第 n（n=0,1,2,3, …）步所得的多边形的周长为 l_n,面积为 s_n，则有

$$l_0 = 3, \qquad s_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$l_1 = \frac{4}{3}\times l_0, \qquad s_1 = s_0 + 3\times\frac{1}{9}\times s_0$$

$$l_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2\times l_0, \qquad s_2 = s_1 + 3\times4\times\left(\frac{1}{9}\right)^2\times s_0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$l_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n\times l_0, \qquad s_n = s_{n-1} + 3\times4^{n-1}\times\left(\frac{1}{9}\right)^n\times s_0$$

其中，$s_n = s_{n-1} + 3\times4^{n-1}\times\left(\frac{1}{9}\right)^n\times s_0 = s_{n-1} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\times\frac{s_0}{3}$

$$= s_0 + \frac{s_0}{3} + \left(\frac{4}{9}\right) \times \frac{s_0}{3} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \times \frac{s_0}{3} + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \times \frac{s_0}{3}$$

$$= s_0 + \frac{s_0}{3}\left\{1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= s_0 + \frac{3}{5}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right] s_0$$

对周长和面积分别求极限得

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n \times l_0 = +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left\{s_0 + \frac{3}{5}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right] s_0\right\} = \frac{8}{5}s_0 = \frac{8\sqrt{3}}{20}$$

上面结果表明，随着n的增加， Koch 曲线的长度趋于无穷大，而其围成的几何图形的面积却趋于定值。即在有限的区域内，曲线的长度可以无限长。

1975 年，法国数学家曼德尔布罗特 (B.B.Mandelbrot)出版了《分形：形状、机遇与维数》一书，在书中曼德尔布罗特解决了著名的“英国的海岸线有多长”的问题。曼德尔布罗特指出，海岸线的长度取决于用于测量的尺子的长度。如果用公里作测量单位，从几米到几十米的一些弯曲就无法测量会被忽 略；而改用米来做测量单位，从几厘米到几十厘米的弯曲也会 被忽略，但是海岸线的总长度会增加。海岸线的长度问题正如 koch雪花，如果拿单位长度的尺子去测量 koch 雪花长度有限， 但是如果用于测量的尺子的长度足够短，则 koch 曲线的长度会足够长。《分形：形状、机遇与维数》一书的出版标志着一个新的数学分支“分形几何学”的诞生。

分形几何学是真正描述大自然的几何学，基本思想是：客观事物具有局部与整体以某种形式相似的层次结构，称为自相似性。这种自相似的层次结构，适当的放大或缩小几何尺寸，整个结构不变。例如，从空中观察海岸线与人站在海边观察海岸线具有相似的曲线形状。分形几何学从诞生到现在，已成为当今世界十分风靡和活跃的新理论、新学科，在自然界、物理、化学、生物和地理等学科领域中得到了广泛的应用。

案例 4［洗涤效果］洗衣机的洗衣过程为以下几次循环：加水——漂洗——脱水．假设洗衣机每次加水量为$t\to+\infty$，衣物的污物质量为$t\to+\infty$（单位：千克），衣物脱水后含水量为$t\to+\infty$（单位：千克）．问：经过$t\to+\infty$次循环后，衣物的污物浓度为多少（污物浓度为污物的质量（千克）与水量（升）之比）？能否 100％地清除污物？

解 各次运行时，污物的浓度为

$$\rho_1=\frac{A}{C},\quad \rho_2=\frac{\rho_1 m}{C+m},\quad \rho_3=\frac{\rho_2 m}{C+m},\ \ldots,\quad \rho_n=\frac{\rho_{n-1}m}{C+m},\ \ldots$$

n次循环后，衣物的污物浓度为$\rho_n=\dfrac{Am^{n-1}}{C(C+m)^{n-1}}$

因为$\dfrac{C}{m}>1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{Am^{n-1}}{C(C+m)^{n-1}}=\dfrac{A}{C}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+\dfrac{C}{m})^{n-1}}=0$

当洗涤次数n很大时，衣物的污物浓度会很小，随着洗涤次数的无限增大，留在衣物上的污物浓度接近 0，但永远不为 0．因此要 100％地清除污物是不可能的．

案例 5［游戏销售］当推出一种新的电子游戏程序时，在短期内销售量会迅速增加，然后开始下降，其函数关系为$s(t)=\dfrac{200t}{t^2+100},t\to+\infty$，$t\to+\infty$ 为月份．

(1) 请计算游戏推出后第 6 个月、第 12 个月和第三年的销售量．

(2) 如果要对该产品的长期销售做出预测，请建立相应的表达式．

解 (1) $s(6)=\dfrac{200\times6}{6^2+100}=\dfrac{1200}{136}\approx8.8235$ ，

（2）$s(12)=\dfrac{200\times12}{12^2+100}=\dfrac{2400}{244}\approx9.8361$，

（3）$s(36)=\dfrac{200\times36}{36^2+100}=\dfrac{7200}{1396}\approx5.6176$．

(2) 从上面的数据可以看出，随着时间的推移，该产品的长期销售应为时间$t\to+\infty$时的销售量．即$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{200t}{t^2+100}=0$。

上式说明当时间$t\to+\infty$时，销售量的极限为 0，即人们购买此游戏会越来越少，从而转向购买新的游戏．

第二章　导数与微分

第1节　导数

案例 1［电流］电路中某点处的电流i是通过该点处的电量q关于时间t的瞬时变化率，如果一电路中的电量为$q(t)=t^3+t$.

(1) 求其电流函数$i(t)$；

(2) $t=3$时的电流是多少？

(3) 什么时候电流为 49.

解：（1）$i(t)=\dfrac{dq}{dt}=(t^3+t)'=(t^3)'+(t)'=3t^2+1$

(2) $i(3)=(3t^2+1)|_{t=3}=3\times3^2+1=28$；

(3) 解方程$i(t)=49$，即$3t^2+1=49$，得$t=\pm4$（舍去负值），即当$t=4$时，电流为 49.

案例 2［制冷效果］某电器厂在对冰箱制冷后断电测试其制冷效果，t小时后冰箱的温度为$T=\dfrac{2t}{0.05t+1}-20$．问冰箱温度T 关于时间t的变化率是多少？

解：冰箱温度T关于时间t的变化率为

$$\frac{dT}{dt}=\left(\frac{2t}{0.05t+1}-20\right)'=\left(\frac{2t}{0.05t+1}\right)'-(20)'=\frac{2(0.05t+1)-2t\times0.05}{(0.05t+1)^2}$$

案例 3［电流与电压的关系］在电容器两端加正弦电流电压$u_c=U_m\sin(\omega t+\phi)$，求电流$i$.

解：　因为　$i=C\dfrac{du_c}{dt}=C[U_m\sin(\omega t+\phi)]'=C[U_m\omega\cos(\omega t+\phi)]$

$$=\omega CU_m\sin(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2})=I_m\sin(\omega t+\theta)$$

其中$\omega CU_m=I_m$是电流的峰值（最大值），称振幅，相位$\theta=\phi+\dfrac{\pi}{2}$．由

$u_c=U_m\sin(\omega t+\phi)$，　$i=\omega CU_m\sin(\omega t+\phi+\dfrac{\pi}{2})=I_m\sin(\omega t+\theta)$，

从而可知，电容器上电流与电压有下列关系：

（1）电流i与电压u是同频率的正弦波；

（2）电流 i 比电压 u_c 相位提前 $\frac{\pi}{2}$；

（3）电压峰值与电流峰值之比为 $\frac{U_m}{I_m}=\frac{U_m}{C\omega U_m}=\frac{1}{C\omega}$，

电工中称 $\frac{1}{C\omega}$ 为容抗（容性电抗）.

案例 4［发动机的效率］ 一汽车厂家正在测试新开发的汽车的发动机的效率，发动机的效率 p（%）与汽车的速度 v(单位：km/h)之间的关系为 $p=0.768v-0.00004v^3$ ．问发动机的最大效率是多少？

解 求发动机的最大效率 $p_{最大}$，即求函数 $p=0.768v-0.00004v^3$ 的最大值.

先求极值点. $\frac{dp}{dv}=\left(0.768v-0.00004v^3\right)'=0.768v-0.00012v^2$，

令 $\frac{dp}{dv}=0$，得 $v=80$ （单位：km/h）.

由实际问题知，此时发动机的效率最大，最大效率为 $p(80)\approx 41(\%)$

案例 5［最大输出功率］设在电路中，电源电动势为 E，内阻为 r，（E，r 均为常量），问负载电阻 R 多大时，输出功率 P 最大？

解 消耗在电阻 R 上的功率 $P=I^2R$，其中 I 是回路中的电流，由欧姆定律知

$I=\frac{E}{R+r}$，　　所以 $P=\frac{E^2R}{(R+r)^2}$　$(0<R<+\infty)$.

要使 P 最大，应使 $\frac{dP}{dR}=0$，即 $\frac{dP}{dR}=\frac{E^2}{(R+r)^3}(r-R)=0$

得 $R=r$，此时，$P=\frac{E^2}{4R}$

由于此闭合电路的最大输出功率一定存在，且在 $(0,\ +\infty)$ 内部取得，所以必在 P 的唯一驻点 $R=r$ 处取得．因此，当 $R=r$ 时，输出功率最大为 $P=\frac{E^2}{4R}$.

第2节　函数的微分

案例 1［金属立体受热后体积的改变量］某一正立方形金属体的边长为 2m，当金属受热边长增加 0.01m 时，体积的微分是多少？体积的改变量又是多少？

解：体积的微分为

$dV=(x^3)'dx=3x^2dx=3x^2\Delta x$，

将 $x=2$，$\Delta x=0.01$ 代入上式，得在 $x=2$，$\Delta x=0.01$ 处的微分

$$dV\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=3\times 2^2\times 0.01=0.12\ \ (\mathrm{m}^3),$$

$x=2$，$\Delta x=0.01$ 处体积的改变量为

$$\Delta V\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=(2+0.01)^3-2^3\approx 0.1206\ \ (\mathrm{m}^3),$$

由此可见，$dV\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}\approx\Delta V\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}$.

案例 2［电压改变量］设有一电阻负载 $R=25\Omega$，现负载功率 P 从 400W 变到 401W，求负载两端电压 U 的改变量.

解：由电学知，负载功率 $P=\dfrac{U^2}{R}$，即 $U=\sqrt{RP}$，故

$$dU=\frac{d\sqrt{RP}}{dP}dP=\sqrt{R}\,\frac{d\sqrt{P}}{dP}=\sqrt{R}\,\frac{1}{2\sqrt{P}}dP=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{P}}dP,$$

因为 $R=25$，$P=400$，$dP=1$，所以电压 U 的改变量为

$$\Delta U\approx dU=\frac{\sqrt{25}}{2\sqrt{400}}\times 1=0.125\ \text{（V）}.$$

案例 3［收入增加量］某公司生产一种新型游戏程序，假设能全部出售，收入函数为 $R=36x-\dfrac{x^2}{20}$，其中 x 为公司一天的产量，如果公司每天的产量从 250 增加到 260，请估计公司每天收入的增加量.

解：公司每天产量的增加量为 $\Delta x=10$，用 dR 估计每天的收入增加量为

$$\Delta R\approx dR=\left(36x-\frac{x^2}{20}\right)'\Delta x\Big|_{\Delta x=10}=360-x$$

案例 4[放大电路] 某一负反馈放大电路，记其开环电路的放大倍数为 A，闭环电路的放大倍数为 A_f，则它们二者有函数关系 $A_f=\dfrac{A}{1+0.01A}$．当 $A=10^4$ 时，由于受环境温度变化的影响，A 变化了 10%，求 A_f 的变化量是多少？A_f 的相对变化量又为多少？

解：由于 $A=10^4$ 时，$A_f\approx 100$，用 dA_f 近似计算 ΔA_f，得

$\Delta A_f\approx dA_f=(A_f)'\Delta A$，

其中 $(A_f)'=\left(\dfrac{A}{1+0.01A}\right)'=\dfrac{1}{(1+0.01A)^2}$．

A_f 的变化量 $\Delta A_f\Big|_{\substack{A=10^4\\ \Delta A=0.1A}}\approx\dfrac{1}{(1+0.01A)^2}\cdot\Delta A\Big|_{\substack{A=10^4\\ \Delta A=0.1A}}=\dfrac{0.1\times10^4}{(1+0.01\times10^4)^2}\approx 0.098$，

A_f 的相对变化量约为 $\dfrac{\Delta A_f}{A_f}\approx 0.098/100=0.98\times10^{-4}$

案例 5［钟表误差］ 一机械挂钟的钟摆的周期为 1s，在冬季，摆长因热涨冷缩而缩短了 0.01cm，已知单摆的周期为 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，其中 $g=980\ \text{cm/s}^2$，问这只钟每秒大约快还是慢多少？

解：因为钟摆的周期为 1 秒，所以有 $1=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，解之得摆的原长为 $l=\dfrac{g}{(2\pi)^2}$，又摆长的改变量为 $\Delta l=-0.01$ 厘米，用 dT 近似计算 ΔT，得

$$\Delta T\approx dT=\frac{dT}{dl}\Delta l=\frac{1}{\sqrt{gl}}\Delta l$$

将 $l=\dfrac{g}{(2\pi)^2}$，$\Delta l=-0.01$ 代入上式得

$$\Delta T\approx dT=\pi\frac{1}{\sqrt{gl}}\Delta l=\frac{\pi}{\sqrt{g\cdot\dfrac{g}{(2\pi)^2}}}\times(-0.01)=\frac{2\pi^2}{g}\times(-0.01)\approx-0.0002\ \ \text{(秒)}$$

由于摆长缩短了 0.01 厘米，钟摆的周期相应地缩短了约 0.0002 秒．

案例 6［钟摆快慢］在很多城市都有一种老式的机械钟，由于钟摆是由金属制造的，容易由于温度的改变而热胀冷缩，使得钟摆的摆长产生细微的变化。例如钟

摆的振动周期为$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，其中$g=980cm/s^2$，l为摆长，正常温度下，设摆长为l_0，钟摆的周期大约为$1s$。在夏季由于阳光的照射，钟摆的摆长大约增加$0.005cm$，那么这钟每天的时间是变快还是变慢了呢?

解：根据物理学知识，钟摆的周期变长，则钟会变慢；周期变短，则钟会变快。

又$\because T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, l=\frac{g}{4\pi^2}T$，当$T=1$秒时，$l_0=\frac{g}{4\pi^2}, \Delta l=0.005$，

根据微分知识有，周期的改变$\Delta T\approx dT=\left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)'\cdot\Delta l'$

$\therefore \Delta T\approx\frac{\pi}{\sqrt{g^2/4\pi^2}}\cdot\Delta l=\frac{2\pi^2}{g}\cdot\Delta l$。因为$\Delta l>0$，所以$\Delta T>0$，

即周期变长了，故这钟的时间会变慢。并且周期变长了约为$\frac{2\pi^2}{980}\times 0.005=0.0001$秒。

那么，该钟每天变慢的时间约为0.0001×60×60×24=0.864秒。

第3节　瞬时变化率

案例1[低频跨导] 具有PN节的半导体器件，其电流微变和引起这个变化的电压微变之比称为低频跨导.一种PN节的半导体器件,其转移特性曲线方程为$I=5U^2$,求电压$U=-2$V时的低频跨导.

解：低频跨导是电流微变和引起这个变化的电压微变之比,它在$U=-2$伏时的变化率为　　$I=\lim\limits_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta V}=\lim\limits_{\Delta V\to 0}\frac{5(-2+\Delta V)^2-5(-2)^2}{\Delta V}=10$（V）.

案例2[人口增长率]《全球2000年报告》指出世界人口在1975年为41亿，并以每年2%的相对比率增长．若用P表示自1975年以来的人口数，求$\frac{dP}{dt}, \frac{dP}{dt}\big|_{t=0}$，$\frac{dP}{dt}\big|_{t=15}$，它们的实际意义分别是什么?

解：$\frac{dP}{dt}$表示世界人口总量关于时间的变化率，即$\frac{dP}{dt}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}$，

在$[t,\Delta t]$时间内，世界人口的增长可视为是匀速增长的，由于相对比率为2%，速度为$2\%P(t)$，即　$P(t+\Delta t)-P(t)\approx 2\%P(t)\Delta t$，故有　$\frac{dP}{dt}=2\%P(t)$

由于世界人口每年都以2%的相对比率增长，所以

$$\frac{dP}{dt}=\frac{dP}{dt}\Big|_{t=0}=\frac{dP}{dt}\Big|_{t=15}=2\%P(t)$$

案例3［铜矿开采费］从一个铜矿中开采T吨铜矿的花费为$C=f(T)$元，$f'(2000)=100$意味着什么？

解：对于$f'(2000)=\frac{dC}{dT}\Big|_{T=2000}=100$.

因C的单位为元，T的单位为t，所以$\frac{dC}{dT}$的单位为元/t，$f'(2000)=100$表明当有2000t铜矿从矿中被开采出来时，再开采1t铜矿需花费100元.

案例4［速度］已知某物体做直线运动，运动方程为$s=(t^2+1)(t+1)$，s（单位：m），t（单位：s）．求在$t=3$s时物体的速度？

解：物体运动的速度为 $v=\frac{ds}{dt}=[(t^2+1)(t+1)]'=(t^2+1)'(t+1)+(t^2+1)(t+1)'$

$=2t(t+1)+(t^2+1)\times1=3t^2+2t+1$，

$t=3$ s时的速度为 $v|_{t=3}=(3t^2+2t+1)|_{t=3}=34$ (m/s).

案例5［电压的变化率］一个电阻为3Ω，可变电阻为R的电路中的电压由下式给出：$V=\frac{6R+25}{R+3}$．求在$R=7\Omega$时电压关于可变电阻R的变化率.

解：电压V关于可变电阻R的变化率为

$$V'=\left(\frac{6R+25}{R+3}\right)'=\frac{6(R+3)-(6R+25)}{(R+3)^2}=-\frac{7}{(R+3)^2},$$

在$R=7\Omega$时电压关于可变电阻R的变化率为 $V'|_{R=7}=-\frac{7}{(7+3)^2}=-0.07$.

案例6[并联电阻］当电流通过两个并联电阻r_1，r_2时，总电阻由下式给出：$\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$，求R对$r_1$的变化率．假定$r_2$是常量.

解：由$\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$知$R=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$，因为$r_2$是常数，所以

$$\frac{dR}{dr_1}=\frac{d}{dr_1}\left(\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}\right)=\frac{r_2(r_1+r_2)-r_1r_2}{(r_1+r_2)^2}=\frac{{r_2}^2}{(r_1+r_2)^2}$$

案例 7［制冷效果］某电器厂在对冰箱制冷后断电测试其制冷效果，t小时后冰箱的温度为$T=\dfrac{2t}{0.05t+1}-20$(单位：^0C)．问冰箱温度T关于时间t的变化率是多少？

解：冰箱温度T关于时间t的变化率为

$$\frac{dT}{dt}=\left(\frac{2t}{0.05t+1}-20\right)'=\left(\frac{2t}{0.05t+1}\right)'-(20)'=\frac{2(0.05t+1)-2t\times0.05}{(0.05t+1)^2}=\frac{2}{(0.05t+1)^2}.$$

案例 8［放射物的衰减］现有 1g 放射性元素碳 14,已知其第t年的剩余量为$M(t)=e^{-0.000121t}$,求碳 14 的衰减速度并得出其衰变规律。

解：碳-14 的衰减速度 $v(t)=\dfrac{dM(t)}{dt}=(e^{-0.000121t})'=-0.000121M(t)$

即碳-14 的衰减速度为$-0.000121e^{-0.000121t}$克/年，负号表示递减。

碳-14 的衰变速度与当时未衰变的碳-14 含量$M(t)$成正比。

案例 9［钢棒长度的变化率］假设某钢棒的长度 L（单位：cm）取决于气温 H（单位：0C），而气温 H 又取决于时间t（单位：h），如果气温每升高 10C，钢棒长度增加 2cm，而每隔 1 小时，气温上升 30C，问钢棒长度关于时间的增加有多快？

解：已知长度对气温的变化率$\dfrac{dL}{dH}=2\,\text{cm}/^0C$.

气温对时间的变化率为$\dfrac{dH}{dt}=3\,^0C/h$.

要求长度对时间的变化率，即求$\dfrac{dL}{dt}$.

将L看作H的函数，H看作t的函数，由复合函数求导的链式法则得

$$\frac{dL}{dt}=\frac{dL}{dH}\cdot\frac{dH}{dt}=2\times3=6\ \text{(cm/h)}.$$

因而，长度关于时间的增长率为 6cm/h.

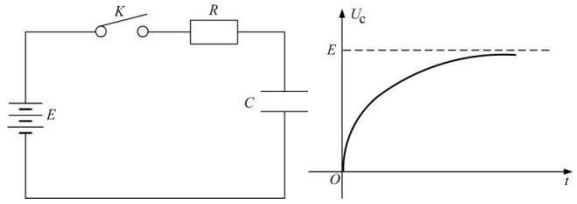
案例 10［充电速度］对电容器充电的过程中，电容器充电的电压为

$u_c=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$,求电容器的充电速度$\dfrac{du_c}{dt}$（如下图）.

解：利用复合函数的求导法则，有

$$\frac{du_c}{dt}=\left[E(1-e^{-\frac{t}{RC}})\right]'=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})'=E\left[0-e^{-\frac{t}{RC}}(-\frac{t}{RC})\right]$$

$$=E\left[0-e^{-\frac{t}{RC}}(-\frac{t}{RC})'\right]=E\left[0-e^{-\frac{t}{RC}}(-\frac{1}{RC})\right]=\frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$



第4节　函数的单调性

案例 1［增长率］若某国的国民生产总值的增长率$\frac{dP}{dt}>0$，由函数单调性的判定方法知$P(t)$是一单调增加函数，即该国的国民生产总值越来越大；反之，若某国的国民生产总值的增长率$\frac{dP}{dt}<0$，则该国的国民生产总值越来越小.

案例 2［石油蕴藏］假设P为在第t年时地球的石油总蕴藏量(包括未被发现的)，假设没有新的石油产生，并且P以桶为单位计量，$\frac{dP}{dt}$的单位是什么？它有何意义？它的符号为正还是负？为什么？

解：由于没有新的石油产生,而地球的石油是不可再生资源,随着对石油的消耗，其总量会越来越少，因此地球的石油总蕴藏量$P(t)$是一单调减少函数， 所以$\frac{dP}{dt}<0$．因为P的单位是桶，t的单位是年，所以$\frac{dP}{dt}$的单位是桶/年.

案例 3［人口增长］中国的人口总数P（以 10 亿为单位）在 1993 年—1995 年间可近似地用方程$P=1.15\times(1.014)^t$来计算，其中t是以 1993 年为起点的 年数，根据这一方程，说明中国人口总数在这段时间是增长还是减少？

解：中国人口总数在 1993—1995 年间的增长率$(t>0)$为

$$\frac{dP}{dt}=\left[1.15\times(1.014)^t\right]'=1.15\times\left[(1.014)^t\right]'=1.15\times(1.014)^t\times\ln 1.014>0,$$

因此中国人口总数在 1993—1995 年期间是增长的.

案例 4［血液的压强］血液从心脏流出，经主动脉后流到毛细血管，再通过静脉

流回心脏．医生建立了某病人在心脏收缩的一个周期内血压P（单位：mmHg）的数学模型$P=\dfrac{25t^2+123}{t^2+1}$，$t>0$表示血液从心脏流出的时间（t 的单位：秒）．问在心脏收缩的一个周期里，血压是单调增加的还是单调减少的

解：$P'=\left(\dfrac{25t^2+123}{t^2+1}\right)'$

$$=\frac{(25t^2+123)'(t^2+1)-(25t^2+123)(t^2+1)'}{(t^2+1)^2}=\frac{50t(t^2+1)-2t(25t^2+123)}{(t^2+1)^2}=-\frac{196t}{(t^2+1)^2}<0.$$

因为$t>0$，所以$P'=-\dfrac{196t}{(t^2+1)^2}<0$，故在心脏收缩的一个周期里，血压是单调减少的．

第5节　函数的极值与最值

案例 1［容器的设计］要设计一个容积为 500ml 的圆柱形容器，其底面半径与高之比为多少时容器所耗材料最少？

解：设其底面半径为r，高为h，

其表面积为　$S=2\pi rh+2\pi r^2$；容积为　$V=500=\pi r^2h$

即$h=\dfrac{500}{\pi r^2}$，代入$S=2\pi rh+2\pi r^2$，得表面积$S=\dfrac{1000}{r}+2\pi r^2$，

求导　$S'=-\dfrac{1000}{r^2}+4\pi r$

解$S'=0$，得唯一驻点$r=\left(\dfrac{500}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$，因为此问题的最小值一定存在，故此驻点即为

最小值点，将$r=\left(\dfrac{500}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$代入$V=500=\pi r^2h$,得$h=\left(\dfrac{2000}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$，即　$\dfrac{r}{h}=\dfrac{1}{2}$，

故当底面半径与高之比为 1：2 时，所用材料最少．

案例 2［采矿爆破］露天采矿、采石或取土经常采用炸药包进行爆破，经过长期实践发现爆破部分呈圆锥漏斗形状，圆锥母线长是 R，它是固定的。问炸药包埋入多深时能使爆破体积最大?

解：设深度为h

体积　$V=\dfrac{1}{3}\pi(R^2-h^2)h\quad(0<h<R)$　　求导　$V'=\dfrac{1}{3}\pi(R^2-3h^2)$

令$V'=0$　　得$h=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}R$舍去负值

又$V''=-2\pi h$，$V''(\frac{\sqrt{3}}{3}R)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi R<0$

深度$h=\frac{\sqrt{3}}{3}R$ 时，爆破体积最大。

案例 3[税收问题]某企业的总收益函数和总成本函数分别为$R=40q-2q^2, C=q^2+4q+3$，企业要追求最大利润，政府要对产品征税，求：

(1)政府征税的最大收益及此时的税率r；

(2)企业税前和税后的最大利润和此时的平均价格。

解：(1)企业在税率为r 的情况下利润函数

$L=R-C-qr \quad q>0$

利润L 最大$\frac{dL}{dq}=0$,即$40-4q-2q-4-r=0$

$\therefore \quad q(r)=6-\frac{r}{6}$

根据实际问题，此时q就是纳税后企业获得最大利润的生 产水平。所以，此时的征税收益函数：　$T=rq(r)=6r-\frac{r^2}{6}$

T 要最大，$\frac{dT}{dr}=0$ ，即 $6-\frac{r}{3}=0,\Rightarrow r=18$

当$r=18$时，税收T 最大且最大值$T(18)=54$，此时的生产水平$q(18)=3$。

(2)纳税前的总利润$L=R-C=-3q^2+36q-3$，

可求得生产水平$q=6$　时可获得最大利润$L=105$,

此时价格$P=\frac{R}{q}=28$

将税后的产出$q=3$和$r=18$ ，代入利润函数$L=-3q^2+(36-r)q-3$

得最大利润$L=24$，　此时的价格 $P=\frac{R}{q}=34$

由此可见在确保企业和征税收益最大化的前提下，因征税，产出水平由 6 下降到 3;价格由 28 上涨到 34;而最大利润由 105 下降到 24。

案例 4[规划问题]为了确定每天工作时间增加对劳动价值增加的影响。每天工作x小时，产生劳动产品的价值经过测算为y元。其关系是$y=300+30x-x^2$。

求劳动价值对工作时间的边际收益。假设正常上班 8 小时，求出 8 小时以外最合适的加班时间长度。

解：因为 $y=300+30x-x^2 \quad x\in[0,24]$

所以 $y'=30x-2x, \quad y''=-2$

所以 y' 是单调递减函数，即工作时间每增加 1 小时，生产 的劳动价值的增加量越来越少。边际收益呈现递减规律。

当 $x\in[0,15], y'>0$，说明每增加 1 小时工作时间，劳动价值的确能增加，但是增加的幅度逐渐减小。当 $x\in[15,24], y'<0$，工作时间超过 15 小时以后，每增加 1 小时工作时间， 劳动价值增加量是负数，劳动价值在减少，通常是由于效率低下，生产的产品质量不达标，浪费了原材料，使总的价值减少。

所以工人应该有适当的工作时间，加班虽然会产生更多经济效益，但是不要无限加班，加班时间太长，效率反而低下，有损总的经济效益。多数企业每日工作 8 小时，按照本题函数的结论，8 小时后还可以加班 7 小时，一共工作 15 小时，就不能再加班了。如果超过 15 小时，即使工人迫于无奈加班，效益反而减少。

注：本题还可以衍伸为，x 是经济成本投入量，y 是经济 产出量。通常 x 投入越多，y 产出越多，但是 y' 可能是递减的，x 每增加一个单位量，y 相应增加的量的 y'. 假如 $y'<0$. 就不能再增加投入了，此时有 y 的增加量已经是负数，代表减产。

案例 5［停产时间］油井投资 10 百万元建成。在时刻 t 的成本与收益分别是 $C(t), R(t)$，追加成本与增加收益分别是 $C'(t), R'(t), C'(t)=2+t^{\frac{2}{3}}, R'(t)=10-t^{\frac{2}{3}}$ 单位：百万元/年。该油井开始利润很大，后来会逐渐减小，试确定该油井何时停产能获得最大利润，最大利润是多少?

解：利润 $\quad L(t)=R(t)-C(t)$

极值的必要条件是 $\quad L'(t)=R'(t)-C'(t)=0$

即 $\quad R'(t)=C'(t)$

$2+t^{\frac{2}{3}}=10-t^{\frac{2}{3}}$， 得 $t=8$

极大值点充分条件是 $L''(t)=R''(t)-C''(t)<0$，

检验后的确 $\quad L''(8)=R''(8)-C''(8)=-\frac{4}{3}t^{-\frac{1}{3}}\big|_{t=8}<0$

故最佳停产时间是 8 年，8 年后继续生产会亏本。成本大于收益，利润为负。到第 8 年为止总的利润是

$$L=\int_0^8 L'(t)dt-10=\int_0^8[R'(t)-C'(t)]dt-10=15.6$$

总利润 15.6 百万元。

案例 6［讲授时间］通过研究一组学生的学习行为，心理学家发现接受一个概 念的能力依赖于在概念引入之前老师提出和描述问题所用的 时间。刚开始的时候，学生的兴趣激增，但随着时间的延长，学生的注意力开始分散。分析结果表明，学生掌握概念的能力由下式给出

$$F(x)=-0.1x^2+2.6x+43$$

其中，$F(x)$是接受能力的一种度量，x是提出概念所用的时间(单位：分钟)

(1) x为何值时，学生学习能力增强或降低?

(2)第 10 分钟时，学生的兴趣是增长还是注意力下降?

(3)最难的概念应该在何时讲授?

(4)一个概念需要 55 的接受能力，它适于对这组学生讲授么?

解：(1)令$F'(x)=-0.2x+2.6$，　　则$x=13$。

当$x<13$时，$F'(x)>0, F(x)$单调上升；当$x>13$时，$F'(x)<0, F(x)$

单调下降。所以当提出概念所用的时间小于 13 分钟时，接受能力增强；当提出概念所用的时间大于 13 分钟时，接受能力降低。

(2) $x=10<13$，$F(x)$单调上升，学生的兴趣在增长。

(3) $F(x)$在$x=13$时取得极大值，所以最难的概念应该在提出问题后的第 13 分钟时讲授。

(4)因为$F(13)=59.9$，这个概念需要 55 的接受能力，小于最大接受能力，所以可以对这组学生讲授该概念。

案例 7［最大容积］设有一个长 8 分米和宽 5 分米的矩形铁片，在四个角上切去大小相同的小正方形，问切去的小正方形的边长为多少分米时，才能使剩下的铁片折成开口盒子的容积为最大？并求开口盒子容积的最大值.

解：设切去的小正方形的边长为x分米，则盒子的容积为

$V=(8-2x)(5-2x)x \quad (0<x<\frac{5}{2})$，

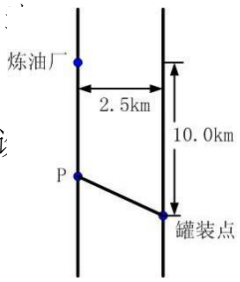
求导　　$V'=-2(5-2x)x-2(8-2x)+x(8-2x)(5-2x)=4(x-1)(3x-10)$

令$V'=0$，得驻点$x_1=1, x_2=\frac{10}{3}$（$x_2>\frac{5}{2}$，应舍去)，则符合题意的驻点只有$x=1$.由

于开口盒子容积的最大值一定存在，而且在$\left(0,\frac{5}{2}\right)$内取得，而$V'=0$在$\left(0,\frac{5}{2}\right)$内只有一个根$x=1$，故此点为所求的最大值点.

所以切去的小正方形的边长为 1 分米时，做成的开口盒子容积最大，最大容积是 18 立方分米.

案例 8［油管铺设路线的设计］要铺设一石油管道，将石油从炼油厂输送到石油罐装点，如右图所示. 炼油厂附近有条宽 2.5km 的河，罐装点在炼油厂的对岸沿河下游 10km 处. 如果在水中铺设管道的费用为 6 万元/km，在河边铺设管道的费用为 4 万元/km. 试在河边找一点P，使管道铺设费最低.



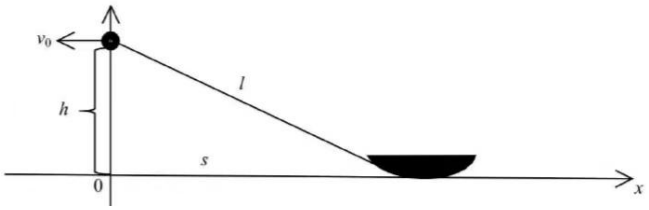
解：设P点距炼油厂的距离为x，管道铺设费为y，由题意有

$$y=4x+6\sqrt{(10-x^2)+2.5^2}\quad(x>0)\,,$$

$$y'=(4x)'-6\cdot\frac{\left[(10-x^2)+2.5^2\right]'}{2\sqrt{(10-x^2)+2.5^2}}=4-\frac{6(10-x)}{\sqrt{(10-x^2)+2.5^2}}$$

令$y'=0$，得驻点$x=10\pm\frac{10}{\sqrt{20}}$，舍去大于 10 的驻点，由于管道最低铺设费一定存在，且在$(0,10)$内取得，所以最小值点为$x\approx 7.764\,\text{km}$，最低的管道铺设费为$y\approx 51.18$万元.

案例 9［拉船靠岸］如图所示。



在离水平高度为hm 的岸上，有人用绳子拉船靠岸，假定绳长为lm,船位于离岸壁sm 处，试问：当收绳速度为v_0m/s 时，船的速度，加速度各为多少?

解：l,s,h三者构成直角三角形，有$l^2=s^2+h^2$，

两边同时对t求导，得

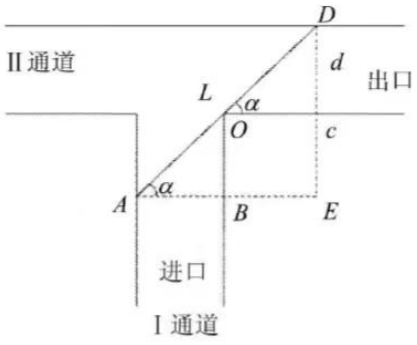
$$l\frac{dl}{dt}=s\frac{ds}{dt}$$

按速度定义，收绳速度 $v_0=\dfrac{dl}{dt}$ ，船速 $v=\dfrac{ds}{dt}$

代入后得 $v=\dfrac{l}{s}v_0=\dfrac{\sqrt{h^2+s^2}}{s}v_0$，

从而加速度 $a=v'(t)=-\dfrac{h^2v_0^2}{s^3}$。

案例 10 [通道的设计]某人扛着一根长为 L 的长杆要从一通道中行进（如下图）。他从 I 通道进口出发，再从 II 通道的出口离开。现如何确定一个 II 通道的最佳宽度尺寸使其顺利通过，而不去对 I 通道做任何改变。



解：设 II 通道的宽度为 d，I 通道的宽度为固定值 d_0，并且记 $\angle DAB=\angle DOC=\alpha$，记 O 为杆的支撑点。

由上图知：$d=OD\cdot\sin\alpha, OD=AD-OA=L-\dfrac{AB}{\cos\alpha}, AB=d_0$

因此问题转化为求 α 使 d 的值达到最小。

求导：$d'_\alpha=(L-\dfrac{d_0}{\cos\alpha})\sin\alpha=L\sin\alpha-d_0\tan\alpha$，

得到 $\cos\alpha=\sqrt[3]{\dfrac{d_0}{L}}$，$\alpha=arc\cos\sqrt[3]{\dfrac{d_0}{L}}$ 为 d 的驻点，又因为这是一个实际问题，因而 $\alpha_0=arc\cos\sqrt[3]{\dfrac{d_0}{L}}$ 时，d 取得最小值。

比如 I 通道的宽度是 2m，杆长为 16m 时，$\alpha_0=\dfrac{\pi}{3}$，此时

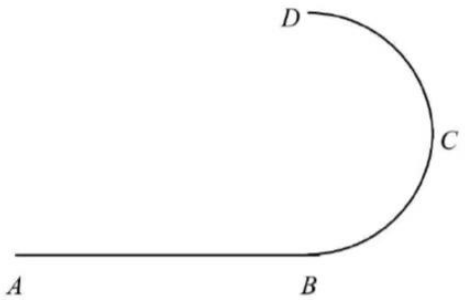
$$d=16\sin\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{3}\approx10.392(m)$$

即 II 通道的宽度至少要 10.392 m 才能让杆顺利通过。

案例 11 [轨道的设计]列车在从直道进入弯道时，为什么常会产生摇晃震动?怎样去减少这种摇晃?

解：列车在拐弯时将受到向心力的作用，如果向心力的变化不连续，则将产生摇晃。由力学知识可知，轨道上一点处的向心力大小为 $\dfrac{mv^2}{R}$，其中 m 是物体的质

量，v是运动速度，R是轨道在该点处的曲率半径。如果让列车由直道直接进入圆弧形轨道，如下图所示



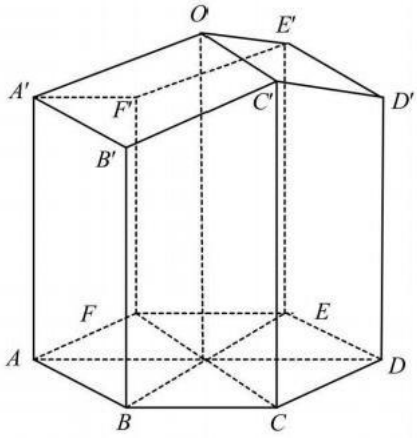
尽管轨道是光滑连接的，但是由于直线的曲率半径为无穷大，因而在轨道的连接点B处，向心力的大小将发生跳跃，这就会导致摇晃震动。为了减小摇晃，必须让轨道的曲率半径R连续变化。容易求得立方抛物线$y=ax^3\ (a>0)$在任一点处的曲率半径

$$R=\frac{(1+9a^2x^4)^{\frac{3}{2}}}{6a|x|}$$

当$x\neq 0$时，R随x连续变化，且当$x\to 0$时，$R\to+\infty$。

因此如果我们在修筑铁路时，先在直道末端接上一段立方抛物线BC，再在立方抛物线上选取适当的点C处与圆弧形轨道CD相接，使此立方抛物线在C 处的曲率半径近似于圆弧CD的半径，这样在从直轨AB转入弯轨BCD时，曲率半径R将接近连续变化，从而减小列车的摇晃震动。

案例 12 [奇妙的蜂房]蜜蜂营造的蜂房具有非常奇妙的结构，它的每一个蜂巢是一个正六棱柱，入口是一个正六边形 ABCDEF,柱底是由三个大小相等的菱形围成的一个三面角，如下图所示。



长期以来，人们对于蜂房的精巧结构有着非常大的兴趣。 设正六边形的边长为

$a, CC'=h, \angle A'B'C'=2\theta$，下面先建立蜂巢的表面积$S$与$\theta$的函数关系。

设菱形$A'B'C'O$的面积为S_1，梯形$AA'B'B$的面积为S_2，则蜂巢的表面积为$S=3S_1+6S_2$，　由于$A'C'=AC=\sqrt{3}a$，　从而不难求得，

$$S_1=\frac{3}{2}a^2\cot\theta, S_2=ah-\frac{a^2}{4}\sqrt{3\cot^2\theta-1},$$

故$S=6ah+\frac{9a^2\cot\theta}{2}-\frac{3a^2}{2}\sqrt{3\cot^2\theta-1},\ \theta\in(0,\frac{\pi}{3})$

下面求S的最小值。令　$x=\cot\theta$，则

$$S=6ah+\frac{9a^2x}{2}-\frac{3a^2}{2}\sqrt{3x^2-1}, x\in(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$$

令　$\frac{dS}{dx}=\frac{9a^2}{2}-\frac{9a^2}{2}\frac{x}{\sqrt{3x^2-1}}=\frac{9a^2}{2}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3x^2-1}(\sqrt{3x^2-1}+x)}=0$

得唯一驻点$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$，进一步可得当$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$时，S　最小，此时

$$\theta=arc\cot\frac{1}{\sqrt{2}}\approx55°$$

由此可知，当$\theta_0\approx55°$时，蜂巢的表面积最小。实际测量的$\theta=109°28'$，结果表明，蜂巢的θ角与上述计算所得的$\theta_0\approx55°$非常接近，误差不超过1°。结论：在蜂巢容积一定的条件下，当$\theta_0\approx55°$时，蜂巢的 表面积最小，即蜜蜂营造蜂巢所用的材料(蜂蜡)最省，这个 结果与人们对蜂巢的实际观测是一致的，它告诉我们，蜜蜂将 蜂房造成如此巧妙的结构，是为了节省材料，也使我们不得不 感叹，小小蜜蜂真是一个“能工巧匠”！

案例 13 [版面设计]要求设计一张单栏的竖向的海报，它的印刷面积 128cm²，上下空白各 2cm，两边空白各 1cm，如何确定海报尺寸可使四周空白面积为最小?

解：设印刷面积由从上到下长$x$cm 和从左到右$y$cm 构成，则$xy=128$，于是四周空白面积为

$$S=2x+4y+4\times2=2x+\frac{4\times128}{x}+8, 0<x<+\infty$$

两边同时对x求导，得

$$S'=2-\frac{512}{x^2}$$

令　$S'=0$　得$x=16$，此时$y=8$，

又　$S''=\frac{1024}{x^3}>0, 0<x<+\infty$

所以当海报印刷部分为从上到下长 16cm,从左到右宽 8cm 时，可使四周空白面积为最小。

案例 14 [最大利润]某资产管理公司以 4%的年利率获得贷款，而后又将此贷款贷

出去，以获取收益。假设能贷出的金额与贷出的利率的平方成反比(利率过高无人借贷),问该公司贷出贷款的年利率为多少时资产管理公司所获利润最大?

解：设贷出贷款的年利率为r，则贷出贷款的金额为$\frac{k}{r^2}(k>0)$

资产管理公司所获利润 $L=(r-0.04)\frac{k}{r^2}=\frac{k}{r}-\frac{0.04k}{r^2}$

由$\frac{dL}{dr}=0$ 得$-\frac{k}{r^2}+\frac{0.08k}{r^3}=0$ ，解 得$r=0.08$

因 $\frac{dL}{dr}=\frac{k}{r^3}(0.08-r)$

所以 $0<r<0.08,\frac{dL}{dr}>0, r>0.08,\frac{dL}{dr}<0$

$r=0.08$是极大值，也是最大值点，即年贷款利率为$r=8\%$时获利最大。

案例 15 [商品定价]设某商场以每双 100 元的价格购进一批皮鞋，假设此种商品的需求函数$Q=400-2P$(其中Q为需求量，P为销售价格，单位：元)。问定价为多少时，才能获得最大利润?并求最大利润。

解：设总利润、总收入、总成本分别为L,R,C 所以$L=L(P)=R(P)-C(P)$

而$R=PQ=P(400-2P)=400P-2P^2$，$C=100Q=40000-200P$

利润$L=R-C=-2P^2+600P-40000$

令$L'=-4P+600$ 得 $P=150$

又$L''=-4<0$

故$P=150$元时，利润L最大。最大利润$L(150)=5000$元

即：将每双皮鞋定价为 150 元销售时，可获得最大利润 5000 元。

案例 16[公寓定价]富翁手里持有 100 套公寓要出租，当租金为每月 700 元， 公寓会全部租出去。当租金每月增加 100 元时，就有一套公寓租不出去，而租出去的房子每月需花 100 元整修维护费，试问房租定位多少，可获得最大收入。

解：设房租为x元，其中x=700,800,900 … 是 100 的整数倍。

则租出去的公寓套数为 $100-\frac{x-700}{100}$

每月总收入为 $R(x)=(x-100)(100-\frac{x-700}{100})=(x-100)(107-\frac{x}{100})$

用乘法求导公式得

$$R'(x)=(107-\frac{x}{100})+(x-100)(-\frac{1}{100})=-\frac{x}{50}+108$$

解得唯一驻点x=5400。

故每月每套租金 5400 元，能获得最大收入，最大收入为 280900 元。

若令x=5300 或 5500,收入是 280800 元。可见炒房者手里房子很多的时候，可以把租金或房价炒到奇高。

注：引申 1,若设富翁手里的公寓不是 100 套，而是a套。

则房租为x元时，租出去的公寓套数为$a-\frac{x-700}{100}$,

每月总收入为

$$R(x)=(x-100)(a-\frac{x-700}{100})=(x-100)(a+7-\frac{x}{100})$$

$$R'(x)=(a+7-\frac{x}{100})+(x-100)(-\frac{1}{100})=-\frac{x}{50}+a+8$$

解得唯一驻点$x=50(a+8)$。

富翁的房子套数a越多，越敢提高房租x 。所以炒房者手里房子越多，或者炒房的人越多，房价涨得越高，远远超出老百姓承受能力，祸国殃民。

引申 2：100 套都租出去，若提高房租 100 元，损失一套房租 700 元，但是可以多获得租出去的那 99 套多交的房租 9900 元，所以富翁敢恣意涨价。请读者举一反三，若房租每增加 100 元，就有 20 套房子租不出去，客人退房，试算算富翁还敢不敢轻易提高房租。如果大家都不去买房与租房，手里有大量房子的炒房者将会怎样?

案例 17 [资源的持续利用]鱼群是一种可再生资源,为保护鱼类资源不至于枯竭，每年只能适当的进行捕捞。经实验和统计，已知鱼群的再生产曲线$f(x)=rx(1-\frac{x}{N})$(其中x为当年鱼群的总重量，$f(x)$为第二年鱼群的再生产总重量，r为鱼群的自然增长率且 $r>1,N$是自然环境下所能负荷的最大鱼群数量)。设某水库最多可养鱼 10 万千克，若鱼量超过 10 万千克，由于缺少氧气和食物， 鱼群会大范围死亡。根据经验鱼群年自然增长率为 4,求每年合理的捕捞量。

解：设每年的捕捞量为$h(x)$，则第二年捕捞后的鱼群总量为$f(x)-h(x)$

为了保证鱼群总量为某一水平值x，即 $x=f(x)-h(x)$

所以 $h(x)=f(x)-x=rx(1-\frac{x}{N})-x$

即 $h(x)=(r-1)x-\frac{r}{N}x^2$

又∵ $r=4,N=10$万千克

∴ $h(x)=3x-0.4x^2$

令　　$h'(x)=3-0.8x=0$，得$x=3.75$

又$h''(x)=-0.8<0$，得$x=3.75$时，　$h(x)$为极大值，也为最大值，且$h(3.75)=5.625$。

即：前一年鱼群数量为3.75万千克时，本年的捕捞量为5.625万千克较为合理。

案例18［最大输出功率］设在电路中，电源电动势为E，内阻为r(E，r均为常量)，问负载电阻R多大时，输出功率P最大？

解：　消耗在电阻R上的功率为$P=I^2R$，其中I是回路中的电流，由欧姆定律知$I=\dfrac{E}{R+r}$，所以$P=\dfrac{E^2R}{(R+r)^2}\quad(0<R<+\infty)$.

要使P最大，应使$\dfrac{dP}{dR}=0$，即

$$\frac{dP}{dR}=\frac{E^2(R+r)^2-2E^2R(R+r)}{(R+r)^4}=\frac{E^2(r-R)}{(R+r)^3}=0$$

解之得　$R=r$，　此　时，　$P=\dfrac{E^2}{4R}$　.

由于此闭合电路的最大输出功率一定存在，且在$(0,+\infty)$内部取得，所以必在P的唯一驻点$R=r$处取得．因此，当$R=r$时，输出功率最大为$P=\dfrac{E^2}{4R}$.

第6节　高阶导数

案例1［刹车测试］在测试一汽车的刹车性能时发现，刹车后汽车行驶的距离（单位：m）与时间t(单位：s)满足$s=19.2t-0.4t^3$.

假设汽车作直线运动，求汽车在$t=4$s时的速度和加速度.

解：汽车刹车后的速度为　$v=\dfrac{ds}{dt}=(19.2t-0.4t^3)'=19.2-1.2t^2$　(m/s)，

汽车刹车后的加速度为$a=\dfrac{dv}{dt}=(19.2-1.2t^2)'=-2.4t$　（m/s^2），

$t=4$s时，汽车的速度为$v=\dfrac{ds}{dt}=(19.2-1.2t^2)\big|_{t=4}=0$　（m/s），

$t=4$s时，汽车的加速度为$a=\dfrac{dv}{dt}=-2.4t\big|_{t=4}=-9.6$　（m/s^2）.

案例2［水量增加量］如果一个容器中的水量W随着时间的增加而增加，但增加量越来越小，则$\dfrac{dW}{dt}$、$\dfrac{d^2W}{dt^2}$的正、负符号分别为什么？

解：因为水量W随着时间的增加而增加，所以$\frac{dW}{dt}>0$，但因为增加量越来越小，所以$\frac{d^2W}{dt^2}<0$.

案例 3［通货膨涨］设函数$p(t)$表示某种产品在时刻t的价格，则在通货膨涨期间，$p(t)$将迅速增加．请用$p(t)$的导数描述以下叙述：

(1)通货膨涨仍然存在；

(2)通货膨涨率正在下降；

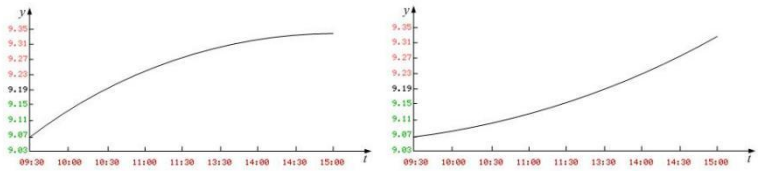
(3)在不久的将来，物价将稳定下来.

解：(1) $p'(t)>0$表示产品的价格在上升，即通货膨涨仍然存在；

(2) $p'(t)>0$表示通货膨涨存在，$p''(t)<0$表示通货膨涨率正在下降；

(3) $p'(t)\to 0$表示产品的价格不再上升，即物价将稳定下来.

案例 4［股票曲线］假设$P(t)$代表在时刻t某公司的股票价格，请根据以下叙述判定$P(t)$的一阶、二阶导数的正、负号.



（a） (b)

(1) 股票价格上升得越来越快；

(2) 股票价格接近最低点；

(3) 图(a)所示为某种股票某天的价格走势曲线，请说明该股票当天的走势.

解：（1）股票价格上升得越来越快，一方面说明股票价格在上升，即$\frac{dP}{dt}>0$，另一方面说明上升的速度也是单调增加的，即$\frac{d^2P}{d^2t}>0$， 如图(b)所示.

（2）股票价格接近最低点时，应满足$\frac{dP}{dt}=0$.

（3）从图(a)所示的某股票在某天的价格走势曲线可以看出，此曲线是单调上升且为凸的，即$\frac{dP}{dt}>0$，且$\frac{d^2P}{d^2t}<0$. 这说明该股票当日的价格上升得越来越慢.

案例 5[桥梁的曲率］若某一桥梁的桥面设计为抛物线，其方程为$y=x^2$，求它在

点 $M(1,1)$ 处的曲率.

解：由 $y'=2x$，$y''=2$，得 $y'\big|_{x=1}=2$，$y''\big|_{x=1}=2$，代入曲率公式，得

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{(1,1)}=\left|\frac{2}{5^{\frac{3}{2}}}\right|=\frac{2\sqrt{5}}{25}$$

案例 6［比较弧形弓件的弯曲程度］设有两个弧形弓件 A、B，弓件 A 满足曲线方程 $y=x^3$，弓件 B 满足曲线方程 $y=x^2$，试比较两个弓件在 $x=1$ 处的弯曲程度.

解：弓件 A 在 $x=1$ 处 $y'\big|_{x=1}=3x^2\big|_{x=1}=3$，$y''\big|_{x=1}=6x\big|_{x=1}=6$，其曲率为

$$K_1=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{(1,1)}=\left|\frac{6}{10^{\frac{3}{2}}}\right|=\frac{3\sqrt{10}}{50}\approx 0.1897$$

弓件 B 在 $x=1$ 处，$y'\big|_{x=1}=2x\big|_{x=1}=2$，$y''\big|_{x=1}=2$，其曲率为

$$K_2=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{(1,1)}=\left|\frac{2}{5^{\frac{3}{2}}}\right|=\approx 0.1789$$

所以，在 $x=1$ 处弓件 A 的弯曲程度大些.

案例 7［弧形工件的加工］设某工件内表面的截线为抛物线 $y=0.4x^2$，现在要用砂轮磨削其内表面，问用直径多大的砂轮才比较合适？(提示：在磨削弧形工件时，为了不使砂轮与工件接触处附近的那部分工件磨去太多，砂轮的半径应不大于弧形工件上各点处曲率半径中的最小值. 已知抛物线在其顶点处的曲率最大.)

解：由于抛物线在其顶点处的曲率半径最小，因此，只要求出抛物线 $y=0.4x^2$ 在其顶点 $O(0,0)$ 处的曲率半径. 由 $y'=0.8x$，$y''=0.8$

有 $y'\big|_{x=0}=0$，$y''\big|_{x=0}=0.8$.

将其代入曲率计算公式，得 $K=0.8$

因而求得抛物线顶点处的曲率半径 $\rho=\dfrac{1}{K}=1.25$

所以选用砂轮的半径不得超过 1.25 单位长，即直径不得超过 2.5 单位长.

第7节　误差

案例 1［绝对误差］ 设已测得一根圆柱的直径为 43cm，并已知在测量中绝对误差不超过 0.2cm，试用此数据计算圆柱的横截面面积所引起的绝对误差与相对误差．（注：若某个量的准确值为 x，它的近似值为 x^*，称 $|\Delta x|=|x-x^*|$ 为 x^* 的绝对误差．当 $x\neq 0$ 时，称 $\left|\dfrac{x-x^*}{x^*}\right|$ 为 x^* 的相对误差．）

解：圆柱的横截面的直径 $D=43$ cm，直径的绝对误差 $|\Delta D|\le 0.2$，圆柱的横截面面积的近似值为

$$A=\frac{1}{4}\pi D^2=\frac{1}{4}\pi\cdot 43^2=462.25\pi \ (\text{cm}^2).$$

由 D 的测量误差 ΔD 所引起的面积 A 的计算误差 ΔA，可用微分 dA 来近似计算，即

$$\Delta A\approx dA=\frac{1}{2}\pi D\cdot\Delta D=\frac{1}{2}\pi\cdot 43\cdot\Delta D=4.3\pi$$

所求绝对误差为

$$|\Delta A|\approx|dA|=4.3\pi \ (\text{cm}^2)$$

所求相对误差为 $\left|\dfrac{\Delta A}{A}\right|\approx\left|\dfrac{dA}{A}\right|=\dfrac{\frac{1}{2}\pi\cdot D\cdot|\Delta D|}{\frac{1}{4}\pi\cdot D^2}=2\cdot\dfrac{\Delta D}{D}=2\cdot\dfrac{0.2}{43}\approx 0.93\%$

案例 2［计算 e 的近似值］ 计算 e 的近似值，误差不超过 10^{-4}．

解：由 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$

令 $x=1$，有　$e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$

取前 n 项 $e\approx 1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)!}$

则误差要求为 $|r_n|=\dfrac{e^\theta}{(n+1)!}<\dfrac{3}{(n+1)!}<10^{-4}$

得 $n=7$，$|r_7|=\dfrac{1}{8!}<10^{-4}$，则　$e\approx 2.7183$

第8节　微分中值定理的工程背景

案例［定理的工程背景］拉格朗日中值定理：

$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

拉格朗日中值定理工程背景是：(1)如果把$y=f(x)$看成是质点作变速直线运动的位置函数，那么拉格朗日中值定理所揭示的是质点在时间段$[a,b]$上的平均速度恰好可以用时间段$[a,b]$内部某一时刻的瞬时速度来表示；(2)如果把$y=f(x)$看成是电流通过某一导线横截面的电量，x表示时间，那么拉格朗日中值定理表示在$b-a$这段时间内通过导线的平均电量(电流强度)恰好可以用时间段$[a,b]$内某一时刻的瞬时电流强度来表示；(3)如果把$y=f(x)$看成是变力沿直线所做的功，x表示位移，那么拉格朗日中值定理表示在位移长度为$b-a$时的平均功率恰好可以用(a,b)内某一点的瞬时功率来表示。

柯西中值定理：

$f(x),g(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，$f(x),g(x)$在开区间(a,b)内可导，在开区间(a,b)内$f'(x)$与$g'(x)$至少有一个不为0(不妨设$g'(x)\neq 0$)，则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

拉格朗日中值定理工程背景是：如果把$x=f(t)$和$y=g(t)$都看成是质点作变速直线运动的位置函数，那么柯西中值定理所揭示的是质点在时间段$[a,b]$上的平均速度之比恰好等于时间段$[a,b]$内某一时刻ξ的瞬时速度之比来表示。

第三章　定积分

第1节　求总量

案例 1［物体的运动路程］以速度 $v(t)=2t^2$ （米/秒）行驶的汽车在 $t=0$ 秒到 $t=4$ 秒行驶的路程为 $s=\int_0^4 2t^2dt$

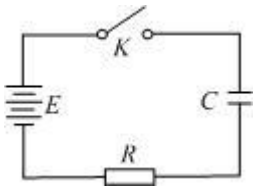
案例 2［水箱积水］设水流到水箱的速度为 $r(t)$ 升 / 分钟，问从 $t=0$ 到 $t=2$ 分钟这段时间内水流入水箱的总量 W 是多少？

解：第一步 在 $[t,\Delta t]$ 时间段内，“以常代变”，将水的流速视为匀速的，得水量微元　$dW=r(t)dt$.

第二步 以 $r(t)dt$ 为被积表达式，在时间段 $[0,2]$ 内积分，得 $t=0$ 到 $t=2$ 分钟这段时间内水流入水箱的总量 W　$W=\int_0^2 r(t)dt$

案例 3［电容器充电时电量的计算］右图所示的电路，当开关 K 合上时，电源 E 就对电容器 C 充电，计算经过时间 T 后，电容器极板上积累的电量 Q 是多少？

解：　电量微元为 $dQ=i(t)dt$



由微元法，在[0,T]时间段极板上积累的电量为

$Q=\int_0^T i(t)dt$

案例 4［稀土矿收入］一个专门出产稀土的资源枯竭型城市，每个月产 60 吨稀土，5 年后稀土资源将开采殆尽。从现在开始 t 个月后，稀土价格趋势是每吨

$$P(t)=24000+0.5\sqrt{t}\ (\text{元})$$

稀土资源很紧俏，一产出就会立即售出，问这个稀土矿城市直到稀土开采完毕，总共可得到多少收入(元)?

解：令 $R(t)$ 表示从现在开始到 t 个月时的收入，则每月的收入是 $R'(t)$ ，每月收入等于当月每吨稀土价格 $P(t)$ 乘以当月售出稀土吨数。因此

$$R'(t)=60(24000+0.5\sqrt{t})$$

此题实际上已知 $R(t)$ 的变化率，求 $R(t)$ 本身，用定积分即可。

$$R(t)=\int_0^t 60(24000+0.5\sqrt{t})dt=60(24000t+\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}})=1440000t+20t^{\frac{3}{2}}$$

由于该城市稀土资源将在第 60 个月枯竭，于是从现在开始到第 60 个月的总

收入是 $R(60)=1440000\times60+20\times60^{\frac{3}{2}}=86409295.2$（元）

注：本题可用微分方程，不定积分，带入初始条件得函数。

案例 5［货物储存］一个生鲜食品公司的货物要存在冷库里，每天给冷库支付租金或保管费。费用与货物的库存量有关。公司在每个月第一天会收到 900 吨水果，存入冷库。每天以一定的比例发货给零售商。已知到货后的x天，$x\in[0,30]$，公司的库存量是$f(x)=900-30\sqrt{30x}$（吨）。一吨水果的保管费是 50 元，问该公司这个月要支付总的保管费，以及平均每天要支付的保管费。

解：首先算出这个月 30 天的总的库存量。

$$\int_0^{30}(900-30\sqrt{30x})dx=9000\text{吨}$$

每天平均库存量是$\frac{9000}{30}=300$吨

总的保管费 9000×50=450000 元，每天平均保管费是 300×50=15000 元

案例 6［心脏供血］心脏收缩压出血液，流向全身，压出血液的速率：$V(t)$（升/秒）可用下面函数描述：$V(t)=\begin{cases}A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) & 0<t<\frac{T}{2}\\ 0 & \frac{T}{2}<t<T\end{cases}$，其中时间$t$（秒）从一次压出血液开始时计算，$A$是最大的压出血液速率，周期$T$为一次心跳所需的时间（秒），分段函数的意义是一个周期T内，前半段时间压出血液，后半段时间没压出血液。

在时间段$[t_1,t_2]$上，其中$[t_1,t_2]\subset[kT,kT+\frac{\pi}{2}]$，$k\in Z$，所压出血液量就是$\int_{t_1}^{t_2}V(t)dt$。试求每次心跳压出的血液量，以及每小时压出的血液量。

解：当$0<t<\frac{T}{2}$，$V(t)>0$，表示压出血液，所以压出血液量为

$$V(t)=\int_0^{\frac{T}{2}}A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt=\frac{AT}{\pi}\text{（升）}$$

一小时内心跳次数$\frac{3600}{T}$

一小时内心脏压出血液量是$\frac{AT}{\pi}\times\frac{3600}{T}=\frac{3600A}{\pi}$（升）

案例 7 [船的载重]船的最大载重：此题船型容器里放置液体 A，容器浮在液体 B 里，问容器里的液体 A 的最大深度是多少?(或最大体积，或最大质量)。

一个密度为 $\frac{25}{19}\times10^3$ (kg/m³) 的容器，内壁面是 $y=\frac{x^2}{10}+1$ 绕 y 轴旋转所得，外壁面是 $y=\frac{x^2}{10}$ 绕 y 轴旋转所得，容器外高 10m。把它铅直的悬浮在水中，水密度是 1×10^3 (kg/m³)，容器内注入 密度为 3×10^3 (kg/m³) 的溶液，要保持容器不沉没，可注入容器的溶液最大深度是多少。

(1) 容器体积是

$$V_1=\int_0^{10}\pi(10y)dy-\int_0^{10}\pi(10y-1)dy=95\pi\ (\text{m}^3)$$

容器质量是

$$M_1=95\pi\times\frac{25}{19}\times10^3=125\pi\times10^3\ (\text{kg/m}^3)$$

(2) 容器内盛放的溶液最大深度 h，

溶液体积为 $V_2=\int_1^{h+1}\pi(10y-10)dy=5\pi h^2\ (\text{m}^3)$

溶液质量为 $M_2=5\pi h^2\times3\times10^3=15\pi h^2\times10^3\ (\text{kg})$

(3) 容器最大排水体积是 $V_3=\int_0^{10}\pi(10y)dy=500\pi\ (\text{m}^3)$

容器的最大排水量，与最大浮力是 $M_3=500\pi\times10^3\ (\text{kg})$

(4) 容器溶液不沉入水底，必须满足

$M_1=M_2+M_3,\quad 125\pi\times10^3=15\pi h^2\times10^3=500\pi\times10^3$ ，

解出 $h=5$ m。容器内溶液最大深度是 5m,再多溶液就使容器沉入水底。

第2节　微积分基本公式

案例 1 [自由落体运动] 一物体在地球引力的作用下开始作自由落体运动，重力加速度为 g. (1) 求物体运动的速度方程和运动方程.

(2) 如果一只球从一幢高楼的屋顶掉下 20s 落地,求此屋的高度.

解：（1）由于物体只受地球引力的作用，由加速度与速度的关系，有

$a=\dfrac{dv}{dt}=g$，且$t=0$时，$v=0$，积分后得 $v=\int gdt=gt+C$，

将$v(0)=0$代入上式，得$C=0$，故作自由落体运动的物体的速度方程为 $v=gt$，

又由 $v=\dfrac{ds}{dt}=gt$，积分得 $s=\int gtdt=\dfrac{1}{2}gt^2+C$，

将$s(0)=0$代入上式，得$C=0$，即自由落体的运动方程为 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$.

（2）因球作的是自由落体运动，所以它满足运动方程$s=\dfrac{1}{2}gt^2$，将时间$t=20$代入上式，可得屋顶距地面 的高度h为 $h=\dfrac{1}{2}g\cdot 20^2=200g$，

如果取重力加速度 $g=9.8m/s^2$，可得此幢楼的高度为 $h=1960$（m）.

案例 2［运动方程］已知一物体作直线运动，其加速度为$a=12t^2-3\sin t$，且当$t=0$时，$v=5$，$s=3$.

（1）求速度v与时间t的函数关系；

（2）求路程s与时间t的函数关系.

解：(1)由速度与加速度的关系$v'(t)=a(t)$知速度$v(t)$满足

$$v'(t)=a(t)=12t^2-3\sin t\text{，且}v(0)=5$$

求不定积分，得 $v'(t)=\int(12t^2-3\sin t)dt=4t^3+3\cos t+C$，

将$v(0)=5$代入上式，得$C=2$．所以 $v(t)=4t^3+3\cos t+2$

(2)由路程与速度的关系$s'(t)=v(t)$，知路程$s(t)$满足

$s'(t)=v(t)=4t^3+3\cos t+2$，且$s(0)=3$

求不定积分，得 $s(t)=\int(4t^3+3\cos t+2)dt=t^4+3\sin t+2t+C$

将$s(0)=3$ 代入上式，得$C=3$．所以 $s(t)=t^4+3\sin t+2t+3$.

案例 3［汽车刹车路程］一辆汽车正以 10m/s 的速度匀速直线行驶，突然发现一障碍物，于是以$-1m/s^2$的加速度匀减速停下，求汽车的刹车路程.

解： 因为$v'(t)=a=-1$，两边从$t=0$到t时刻积分 $\int_0^t v'(t)dt=\int_0^t(-1)dt$

得 $v(t)-v(0)=-t$

即 $v(t)=v(0)-t=10-t$

当汽车速度为零，即$v(t)=10-t=0$时，汽车停下，解出所需要的时间为$t=10$s，再由速度与路程之间的关系，得汽车的刹车路程为

$$s=\int_0^{10}v(t)dt=\int_0^{10}(10-t)dt=(10t-0.5t^2)\Big|_0^{10}=50\ \text{（m）},$$

即汽车的刹车路程为50m.

由此方法可知，若物体作匀加速直线运动，初速度为v_0，加速度为a，则其速度方程为　　$v(t)=v_0+at$，

运动方程为　　$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$.

案例4［磁场能量］在电压和电流关联参考方向下，电感元件吸收的功率为$p=ui=Li\frac{di}{dt}$，在dt时间内，电感元件在磁场中的能量增加量为$dW=pdt=Lidt$，

电流为零时，磁场亦为零，即无磁场能量；当电流从0增大到i时，电感元件储存的磁场能量为 $W=\int_0^i Lidt=\frac{1}{2}Li^2$由此可见，磁场能量只与最终的电流值有关，而与电流建立的过程无关.

案例5［电流函数］一电路中电流关于时间的变化率为$\frac{di}{dt}=4t-0.6t^2$，若$t=0$时，$i=2A$，求电流i关于时间t的函数.

解：　由$\frac{di}{dt}=4t-0.6t^2$，求不定积分得　$i(t)=\int(4t-0.6t^2)dt=2t^2-0.2t^3+C$，

将$i(0)=2$代入上式，得$C=2$，所以$i(t)=2t^2-0.2t^3+2$.

案例6［结冰厚度］池塘结冰的速度由$\frac{dy}{dt}=k\sqrt{t}$给出，其中y是自结冰起到时刻t(单位：h)冰的厚度（单位：cm），k是正常数，求结冰厚度y关于时间t的函数.

解：　由$\frac{dy}{dt}=k\sqrt{t}$，求不定积分得　$y(t)=\int k\sqrt{t}dt=k\int\sqrt{t}dt=k(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C)$，

其中$t=0$开始结冰，此时冰的厚度为0，即有$y(0)=0$，代入上式，得$C=0$，

所以　　$y(t)=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$.

案例 7［收入预测］中国人的收入正在逐年提高．据统计，深圳 2002 年的年人均收入为 21914 元(人民币),假设这一人均收入以速度 $v(t)=600\cdot(1.05)^t$（单位：元/年)增长，这里 t 是从 2002 年年底开始算起的年数，估算 2009 年深圳的年人均收入是多少？

解：因为深圳年人均收入以速度 $v(t)=600\cdot(1.05)^t$（单位：元/年)增长，因 $\frac{dR}{dt}=v(t)$,由变化率求总改变量的方法，得从 2003 年到 2009 年这 7 年间年人均收入的总变化为

$$R=\int_0^7 600\cdot(1.05)^t dt=600\int_0^7(1.05)^t dt=600\left[\frac{(1.05)^t}{\ln 1.05}\right]\Bigg|_{t=0}^{t=7}\approx 5006.3$$（元）．

所以，2009 年深圳的人均收入为 21914+5006.3=26920.3(元）．

案例 8［福岛核辐射]相关链接：2011 年 3 月日本大地震中，福岛第一核电站 1 号反应堆所在建筑物爆炸后，日本政府 13 日承认，在大地震 中受损的福岛第一核电站 2 号机组可能正在发生“事故”,2 号机组的高温核燃料正在发生“泄漏事故”。该核电站的 3 号 机组反应堆面临遭遇外部氢气爆炸风险。目前，共有 21 万人 正紧急疏散到安全地带。受到福岛第一核电站核事故影响，福 岛县持续避难的居民人数最多。有些居民在大地震发生 2 年后 死亡。福岛县统计显示，截至 2014 年 2 月 26 日，该县因地震灾害相关的死亡人数达到 1664 人，已超过地震和海啸直接造 成的遇难人数。

2011 年“3 · 11”日本大地震导致了福岛核辐射事件，引 起全世界的强烈关注，相关单位对该事件进行调查，监测结果 显示，出事当天，放射性物质碘导致大气辐射水平是可接受的 最大限度的 4 倍。于是日本政府下令让福岛当地居民立即撤离这一地区。已知该放射源的辐射水平衰减程度满足下式：

$$M(t)=M_0e^{-0.04t}$$

其中，$M(t)$是 t 时刻的辐射水平(单位：mR/h)(mR 为毫化琴)，M_0是初始辐射水平($t=0$),t 按小时计算。问：

(1)该地核辐射水平要下降到可接受的程度大约需要多长时间?

(2)假设可接受的辐射水平的最大限度为 0.6mR/h,那么从出事到降低到该最大限度时已经泄漏到大气中的放射物总量是多少?

解：(1)设该地核辐射水平要下降到可接受的程度大约需要 T 小时，此时辐

射水平降低到$\frac{1}{4}M_0$，于是有

$$M(t)=M_0e^{-0.04t}=\frac{1}{4}M_0$$

于是求得$T=250\ln 4\approx 346.6$(h)

(2)若可接受的辐射水平的最大限度为0.6mR/h,则$M_0=2.4$

放射源从t=0到250ln4这段时间泄漏出去的放射物总量为

$$W=\int_0^{250\ln 4}2.4e^{-0.04t}dt=-600\int_0^{250\ln 4}e^{-0.04t}d(-0.04t)=450\ (\text{mR})$$

案例7［传染病传播］某城市正在遭受某种传染病的威胁，据研究传染病流行期 间，第t天人们被传染后患病的人数为$s=60t-t^2$,求该传染病在第t天的传播速度?何时患病人数最多?最后共有多少人患病?

解：该传染病在第t天的传播速度

$$v=\frac{ds}{dt}=60-2t\quad(t\geq 0)$$

令$\frac{ds}{dt}=0$，得驻点t=30。

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-2<0$$

得t=30为极大值点，极大值点唯一，所以也为最大值点，

最大值 $s(30)=(60t-t^2)\big|_{t=30}=900$

令$s=0$,得$t=60$,即当传染病开始传染60天后患病人数为0。

60天内患病总人数

$$Q=\int_0^{60}(60t-t^2)\,dt=(30t^2-\frac{t^3}{3})\Big|_0^{60}=3600$$

案例9［石油消耗］近年来世界范围内每年的石油消耗率呈指数增长，增长指数大约为0.07。据统计，2002年我国石油消耗量大约为2.39 亿吨。设$X(t)$表示从2002年起第t年的石油消耗量。已知$X(t)=2.39e^{0.07t}$(亿吨),计算从2002年到2012年间石油消耗的总量。

解：设$R(t)$表示从2002年(t=0) 起到第t年石油消耗的总量。$R'(t)$就是石油消耗率，即$R'(t)=X(t)$。 于是由变化率求总改变量，得

$$T(10)-T(0)=\int_0^{10}R'(t)dt=\int_0^{10}X(t)dt=\int_0^{10}2.39e^{0.07t}dt$$

$$=\frac{2.39}{0.07}\int_0^{10}e^{0.07t}d(0.07t)=\frac{2.39}{0.07}e^{0.07t}\Big|_0^{10}\approx 4.79\text{(亿吨)}$$

案例 10［铬寿命］1970 年，世界范围内的铬的开采量大约是 185 万吨，而已 探明的铬的世界储量大约是 77500 万吨。按每年开采量不变的 标准，已知储量大约可供使用 420 年。然而铬的世界消费率每年呈指数增长，在 1970 年年初，增长指数大约为 0.026。问：(1)如果铬的利用率按指数增长，已探明的铬储量大约能维持多少年？(2)如果铬的储量增加继续探明，使总储量变为原来的五倍，又能维持多少年？

解 ：（ 1 ）设从 1970 年起第t年铬的消费量为$f(t)=185e^{0.026t}$(万吨)，

则从第一年到第T_1年的消耗总量为

$$F(T_1)=\int_0^{T_1}185e^{0.026t}dt\approx 7115(e^{0.026T_1}-1)$$

当T_1=95 时 ，$F(95)\approx 77500$。

即 1970 年探明的铬储量预计能维持到 2060 年。

(2)当总储量变为原来的 5 倍时，即总储量为 387500 万吨时，

$$F(T_2)=\int_0^{T_2}185e^{0.026t}dt\approx 7115(e^{0.026T_2}-1)$$

当T_2=154 时 ，$F(154)\approx 387500$。

即全世界的铬储量预计能维持到 2124 年。

案例 11［选择问题］对于一个正常运转的企业，在经营过程中资金的收入与支出总是频繁的、间断的发生。但在进行经济分析的过程中， 一般将其看作连续发生的，称其为收入流或者支出流。

若企业在$[0,T]$时间区间内，在时刻t收入流的变化率为$f(t)$(元/年或者月/年等),银行年利率为r 。为了计算某笔款项的现值或者终值，可用以下步骤进行分析处理：

(1)分割：可把区间$[0,T]$平均分割成n个长度为Δt_k的子区间。

(2)近似：在Δt_k时间段内，收入的近似值为$f(\tau_k)\Delta t_k$,相应的收入的现值为$f(\tau_k)\Delta te^{-r\tau_k}$，其中$\tau_k$属于第$k$个子区间$\Delta t_k$内的任意一点。

(3)求和： $\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)e^{-r\tau_k}\Delta t_k$

(4)取极限：总收入的现值

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)e^{-r\tau_k}\Delta t=\int_0^T f(t)e^{-rt}dt$$

同理可得总收入的终值 $V=\int_0^T f(t)e^{(T-t)r}dt$

总支出的现值与总收入的现值计算方式相同，总支出的终值与总收入的终值计算方式相同。

某工厂为了扩大生产量，需要增加一套机器设备，其使用 寿命为 10 年。如果购置此套设备需支付 60 万元。(银行的年利率为 5%)

(1)如果租用此设备每年需要支付租金 96000 元。请问购买设备与租用设备那种方式更好?

(2)如果企业购买了设备，并以 15 万元/年的速度收回成本，试计算该投资收入的现值和投资成本回收期。

解：(1)由题意可知， $f(t)=9.6$

可得 10 年的租金支出的现值

$$V=\int_0^T f(t)e^{-rt}dt=\int_0^{10}9.6e^{-0.05t}dt$$

$$=-20\times9.6e^{-0.05t}\Big|_0^{10}=192\times(1-e^{-0.5})\approx76$$

而购置此设备只需现值一次性支付 60 万元，故购买设备更好。

(2)由题意可知， $f(t)=15$

可得 10 年的投资收入的现值

$$V=\int_0^T f(t)e^{-rt}dt=\int_0^{10}15e^{-0.05t}dt\approx118$$

设投资成本回收期为 τ 年，则有 $\int_0^{\tau}15e^{-0.05t}dt=60$

即 $300(1-e^{-0.05\tau})=60$

$$\tau=-20\ln0.8\approx4.5$$

故该投资成本的回收期约为 4.5 年。

第3节　换元积分法

案例 1［石油消耗量］近年来，世界范围内每年的石油消耗率呈指数增长，增长指数大约为 0.07．1970 年初，消耗量大约为 161 亿桶．设 $R(t)$ 表示从 1970 年起第 t 年的石油消耗率，已知 $R(t)=161\cdot e^{0.07t}$（亿桶）．试用此式计算从 1970 年到 1990 年间石油消耗的总量．

解：　设 $T(t)$ 表示从 1970 年（$t=0$）起到第 t 年石油消耗的总量．$T'(t)$ 就是石油消耗率 $R(t)$，即 $T'(t)=R(t)$，于是由变化率求总改变量得

$$T(20)-T(0)=\int_0^{20}T'(t)dt=\int_0^{20}R(t)dt=\int_0^{20}161\cdot e^{0.07t}dt\ ,$$

在基本积分公式中，只有积分公式 $\int e^t dt=e^t+C$，如果将 $\int_0^{20}161\cdot e^{0.07t}dt$ 的积分微元凑成 $d0.07t$，则有　$\int_0^{20}161\cdot e^{0.07t}dt=\dfrac{1}{0.07}\int_0^{20}161\cdot e^{0.07t}d0.07t$，

令 $u=0.07t$，积分变为　$\int_0^{20}161\cdot e^{0.07t}dt=\dfrac{161}{0.07}\int_0^{1.4}e^u du$，

这时，用公式 $\int e^u dt=e^u+C$，得

$$\int_0^{20}161\cdot e^{0.07t}dt=\frac{161}{0.07}\int_0^{20}e^{0.07t}d0.07t=\frac{161}{0.07}\int_0^{1.4}e^u du=\frac{161}{0.07}e^u\Big|_{t=0}^{t=1.4}\approx 7027\ \text{（桶）}.$$

案例 2［太阳能能量］某一太阳能的能量 f 相对于太阳能接触的表面面积 x 的变化率为 $\dfrac{df}{dx}=\dfrac{0.005}{\sqrt{0.01x+1}}$，如果当 $x=0$ 时，$f=0$．求出 f 的函数表达式．

解：对 $\dfrac{df}{dx}=\dfrac{0.005}{\sqrt{0.01x+1}}$ 积分，得

$$f=\int\frac{0.005}{\sqrt{0.01x+1}}dx=\int\frac{0.005}{\sqrt{0.01x+1}}\cdot\frac{1}{0.01}d(0.01x+1)=0.5\int\frac{1}{\sqrt{0.01x+1}}d(0.01x+1)\ ,$$

令　$u=0.01x+1$，得　$f=0.5\int\dfrac{1}{\sqrt{u}}du=0.5\times 2\sqrt{u}+C=\sqrt{u}+C$，

将当 $x=0$，即当 $u=1$ 时，$f=0$，代入上式，得 $C=-1$．所以 $f=\sqrt{0.01x+1}-1$．

案例 3［商品销售量］某种商品一年中的销售速度为

$$v(t)=100+100\cdot\sin(2\pi t-\frac{\pi}{2})\ ,$$

（t 的单位：月；$0\le t\le 12$），求此商品前 3 个月的销售总量．

解：由变化率求总改变量知商品在前 3 个月的销售总量 P 为

$$P=\int_0^3\left[100+100\cdot\sin(2\pi t-\frac{\pi}{2})\right]dt$$

$$=\int_0^3 100dt+\int_0^3 100\cdot\sin(2\pi t-\frac{\pi}{2})\cdot\frac{1}{2\pi}d(2\pi t-\frac{\pi}{2})$$

$$=100t\Big|_{t=0}^{t=3}\cdot\left(-\frac{100}{2\pi}\left[\cos(2\pi t-\frac{\pi}{2})\right]\Big|_{t=0}^{t=3}\right)=300\ .$$

因为未进行变量代换，所以定积分的上、下限不变.

案例 4［电路中的电量］设导线在时刻 t （单位：s)的电流为 $i(t)=0.006t\sqrt{t^2+1}$，求在时间间隔 $[1,4]$ s 内流过导线横截面的电量 $Q(t)$ （单位：A).

解：由电流与电量的关系 $i=\frac{dQ}{dt}$ 得在 $[1,4]$ 秒内流过导线横截面的电量 Q 为

$$Q=\int_1^4 0.006t\sqrt{t^2+1}dt=\int_1^4 0.003\sqrt{t^2+1}d(\sqrt{t^2+1})=[0.002(t^2+1)^{\frac{3}{2}}]\Big|_{t=1}^{t=4}\approx 0.1345\ (\text{A})$$

案例 5［放射物的泄漏］环保局近日受托对一起放射性碘物质泄漏事件进行调查，检测结果显示，出事当日，大气辐射水平是可接受的最大限度的四倍，
于是环保局下令当地居民立即撤离这一地区，已知碘物质放射源的辐射水平是按下式衰减的： $R(t)=R_0e^{-0.004t}$，其中 R 是 t 时刻的辐射水平（单位：mR/h），R_0 是初始（$t=0$）辐射水平，t 按小时计算

(1)该地降低到可接受的辐射水平需要多长时间？

(2)假设可接受的辐射水平的最大限度为 0.6 mR/h，那么降低到这一水平时已经泄漏出去的放射物的总量是多少？(mR:毫伦琴)

解：(1) 设该地降低到可接受辐射水平需要 t_1 小时，此时辐射水平为 $\frac{1}{4}R_0$．于是有 $R(t_1)=R_0e^{-0.004t}=\frac{1}{4}R_0$，

解 得 $t_1=500\ln 2\approx 346.6$ (h)，即需要约 346.6h.

(2) 若可接受辐射水平的最大限度为 0.6 mR/h，则 $R_0=2.4$，放射源从 $t=0$ 到 $t=500\ln 2$ 这段时间泄露出去的放射物总量 W 为

$$W=\int_0^{500\ln 2}2.4e^{-0.004t}dt=\int_0^{500\ln 2}2.4e^{-0.004t}(-\frac{1}{0.004})d(-0.004t)$$

$$=-600\int_0^{500\ln 2}e^{-0.004t}d(-0.004t)=-600(e^{-0.004t})\Big|_{t=0}^{t=500\ln 2}=450\,(mR)$$

第4节　分部积分法

案例 1[新井的石油产量] 工程师们预计一个新开发的天然气新井在开采后的第 t 年的产量为：$P(t)=0.0849te^{-t}\times 10^6$ （m^3），试估计该新井前 4 年的总产量.

解：在$[t,t+\Delta t]$时间段内，天然气的产量（产量微元）为　$dP=P(t)dt$，

该新井前 4 年的总产量为

$$P=\int_0^4 P(t)dt=\int_0^4 0.0849te^{-t}dt=0.0849\int_0^4 te^{-t}dt=0.0849\int_0^4(-t)e^{-t}de^{-t}$$

$$=0.0849(-te^{-t})\Big|_0^4-\int_0^4 e^{-t}d(-t)\approx 0.0771\times 10^6\quad(m^3)\ .$$

案例 2［电能］ 在电力需求的电涌时期，消耗电能的速度 r 可以近似地表示为 $r=te^{-t}$（t 单位：h）. 求在前两个小时内消耗的总电能 E（单位：J）.

解：由变化率求总改变量得

$$E=\int_0^2 rdt=\int_0^2 te^{-t}dt=\int_0^2(-t)de^{-t}$$

$$=(-te^{-t})\Big|_0^2-\int_0^2 e^{-t}d(-t)=-2e^{-2}-0-(e^{-t})\Big|_0^2\approx 0.594\quad(J)\quad.$$

案例 3［石油总产量］ 经济学家研究一口新井的原油生产速度 $R(t)$（t 的单位：年）为　$R(t)=1-0.02t\sin(2\pi t)$，求开始 3 年内生产的石油总量.

解：设开始 3 年内生产的石油总量为 W，由变化率求总改变量得

$$W=\int_0^3[1-0.02t\sin(2\pi t)]dt=3+\frac{0.01}{\pi}\int_0^3 td[\cos(2\pi t)]$$

$$3+\frac{0.01}{\pi}[t\cos(2\pi t)\Big|_0^3-\int_0^3\cos(2\pi t)dt=3+\frac{0.01}{\pi}[3-0-\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\Big|_0^3]\approx 3.0095\ .$$

案例 4［污染］ 某工厂排出大量废气体，造成了严重空气污染，于是工厂通过减产来控制废气的排放量，若时刻 t（单位：年）废气的排放量为 $C(t)=\frac{20\ln(t+1)}{(t+1)^2}$，求该厂在 $t=0$ 到 $t=5$ 年间排出的总废气量.

解：因为该厂在第$[t,t+\Delta t]$排出的废气量（废气量微元）为$dW=\frac{20\ln(t+1)}{(t+1)^2}dt$，所以该厂在$t=0$到$t=5$年间排出的总废气量为

$$W=\int_0^5\frac{20\ln(t+1)}{(t+1)^2}dt=20\int_0^5\ln(t+1)d(-\frac{1}{t+1})=[-\frac{20}{t+1}\ln(t+1)]\Big|_0^5+20\int_0^5\frac{1}{t+1}d\ln(t+1)$$

$$=-\frac{20}{6}\ln 6+20\int_0^5\frac{1}{(t+1)^2}dt=-\frac{20}{6}\ln 6-20\left(\frac{1}{t+1}\right)\Big|_0^5\approx 10.6941$$

案例 5［污染处理］某工厂装备陈旧，排放大量废气给环境带来严重污染。在环保部门的监督下，强制改造废气处理装备，若时刻t（单位：年）废气的排放量为$Q(t)=\frac{10\ln(t+1)}{(t+1)^2}$(万立方米),求该厂在 5 年内的年平均排放量?

解：该工厂在改造装置后 5 年内的年平均排放量为

$$\overline{Q}=\frac{1}{5}\int_0^5\frac{10\ln(t+1)}{(t+1)^2}dt=-2\int_0^5\ln(t+1)d\frac{1}{t+1}$$

$$=-2\ln(t+1)\frac{1}{t+1}\Big|_0^5+2\int_0^5\frac{1}{t+1}d(t+1)=-\frac{\ln 6}{3}+2\int_0^5\frac{1}{(t+1)^2}dt$$

$$=-\frac{\ln 6}{3}-\frac{2}{t+1}\Big|_0^5=-\frac{\ln 6}{3}-\frac{1}{3}+2\approx 1.07$$

即该工厂在改造装置后 5 年内的年平均排放量为 1.07 万立方米。

案例 6［新井产量］我国某地区新开发了一 口天然气新井，工程师们预测在开采后的第t年，该井天然气产量为$q(t)=0.06te^{-t}\times10^6$(㎥)。试估计该新井在前 5 年的总产量。

解：在$[t,t+\Delta t]$时间段内，天然气产量的微元为$dQ=q(t)dt$

该新井前 5 年的总产量为

$$Q=\int_0^5dQ=\int_0^5q(t)dt=\int_0^50.06te^{-t}\times10^6dt$$

$$=0.06\times10^6\cdot\int_0^5te^{-t}dt$$

$$=0.06\times10^6\cdot[-5e^{-5}-e^{-t}]\approx4.488\times10^6\text{(㎥)}$$

第5节　平面图形的面积

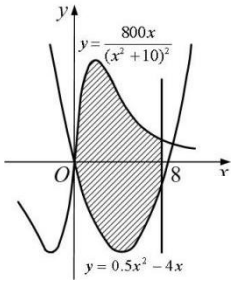
案例 1[窗户面积] 某一窗户的顶部设计为弓形，上方曲线为一抛物线，下方为直线，求此弓形的面积.

解：建立直角坐标系．设此抛物线方程为 $y=-2px^2$，因它过点 $(0.8,-0.64)$，所以 $p=\dfrac{1}{2}$，即抛物线方程为 $y=-x^2$．此图形的面积实际上为由曲线 $y=-x^2$ 与直线 $y=-0.64$ 所围成图形的面积，面积微元为　$dS=[-x^2-(-0.64)]dx$

面积为　$S=\int_{-0.8}^{0.8}[-x^2-(-0.64)]dx=(-\dfrac{2}{3}x^3+0.64x)\Big|_{-0.8}^{0.8}\approx 0.683 \quad (m^2)$

所以窗户的面积为 0.683 平方米.

案例 2 [游泳池的表面面积] 一个工程师正用 CAD（computer-assisted desigen 计算机辅助设计）设计一游泳池，游泳池的表面是由曲线 $y=\dfrac{800x}{(x^2+10)^2}$，$x=8$ 以及 $y=0.5x^2-4x$ 围成的图形，如右图所示，求此游泳池的表面面积.



解：解联立方程组

$$\begin{cases} y=\dfrac{800x}{(x^2+10)^2} \\ y=0.5x^2-4x \end{cases}$$

得两条曲线的右交点(0,0)，左交点的横坐标大于 8．于是，面积微元为

$$dA=\left[\frac{800x}{(x^2+10)^2}-(0.5x^2-4x)\right]dx$$

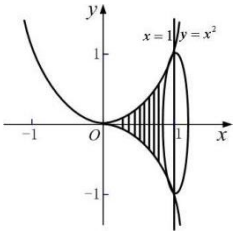
此游泳池的表面面积为

$$A=\int_0^8\frac{800x}{(x^2+10)^2}dx-\int_0^8(0.5x^2-4x)dx$$

$$=\int_0^8\frac{400}{(x^2+10)^2}d(x^2+10)-(\frac{1}{6}x^3-2x^2)\Big|_0^8=-\frac{400}{x^2+10}\Big|_0^8-(\frac{1}{6}x^3-2x^2)\Big|_0^8=77.26\,(m^2)$$

第6节　立体的体积

案例 1［喇叭体积］ 一喇叭可视为由曲线 $y=x^2$、直线 $x=1$ 以及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体，如右图所示．求此旋转体的体积．

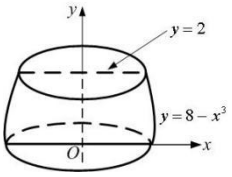


解：在 $[0,1]$ 上任取一点 x，此旋转体的体积微元可近似地视为以 $f(x)$ 为半径的圆为底（即以面积为 $A(x)=\pi[f(x)]^2$ 的圆为底）的柱体，从而体积微元为　$dV=\pi(x^2)^2dx$，

所求旋转体的体积 V 为　$V=\int_0^1\pi(x^2)^2dx=\pi(\frac{1}{5}x^5)\Big|_0^1=\frac{1}{5}\pi$

案例 2［机器底座的体积］ 某人正在用计算机设计一台机器的底座，它在第一象限的图形由 $y=8-x^3$、$y=2$ 以及 x 轴、y 轴围成，底座由此图形绕 y 轴旋转一周而成，如右图所示．试求此底座的体积．

解：此图形实为由曲线 $x=\sqrt[3]{8-y}$ 与直线 $y=2$、$y=0$ 以及 $x=0$ 轴围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体．体积微元为　$dV=\pi(8-y)^{\frac{2}{3}}dy$，所求体积为



$$V=\int_0^2\pi(8-y)^{\frac{2}{3}}dy=-\frac{3}{5}\pi(8-y)^{\frac{5}{3}}\Big|_0^2=\frac{3}{5}\pi(8^{\frac{5}{3}}-6^{\frac{5}{3}})\approx 7.313\pi$$

第7节　平面曲线的弧长

案例 1［运动路程］ 已知一物体的运动规律为 $\begin{cases}x=e^t\cos\pi t\\ y=e^t\sin\pi t\end{cases}$，（t 的单位：s；$s$ 的单位：m）．求它从 $t=0$ s 到 $t=1$ s 所移动的距离．

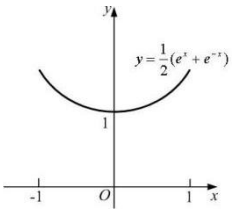
解：物体的运动规律由参数方程给出，随着时间 t 的变化，物体运动的轨迹是一条曲线．此问题事实上是求该曲线从 $t=0$ 到 $t=1$ s 的一段弧长．

由参数方程下弧长的计算公式，得

$$s=\int_0^1\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt=\int_0^1\sqrt{(e^t\cos\pi t-e^t\pi\sin\pi t)^2+(e^t\sin\pi t+e^t\pi\cos\pi t)^2}dt$$

$$=\sqrt{1+\pi^2}\int_0^1 e^t dt=\sqrt{1+\pi^2}e^t\Big|_0^1=\sqrt{1+\pi^2}(e-1)\approx 5.665(m)\ .$$

案例 2［悬链线长度］ 下图所示的函数为 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，这一函数称为悬链线，它表示的是一悬挂在空中的线缆的形状，求此悬链线位于 $x=-1$ 和 $x=1$ 之间的长度.



解：由弧长计算公式得

$$l=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2}dx$$

利用对称性，得

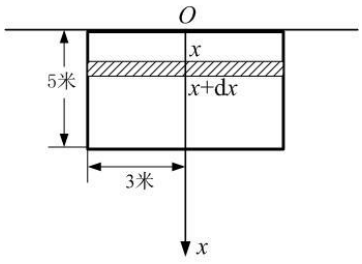
$$l=2\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2}dx=\int_0^1\sqrt{(e^x+e^{-x})^2}dx=\int_0^1(e^x+e^{-x})dx=e-e^{-1}$$

第8节　变力沿直线所作的功

案例 1［吸水所作的功］ 一圆柱形的储水桶高为 5m，底圆半径为 3m，桶内盛满水．问要把桶内的水全部吸出需作多少功？

解：作 x 轴如右图所示．取深度 x 为积分变量．它的变化区间为[0,5]，相应于[0,5]上任一小区间 $[x,x+dx]$ 的一薄层水的高度为 dx，水的比重为 9.8kt/m^3，因此如 x 的单位是 m，这薄层水的重力为 $9.8\pi\cdot 3^2 dx$．这薄层水吸出桶外需作之功近似地为

$$dW=88.2\pi\cdot x\cdot dx$$



此即功元素．于是所求的功为

$$W=\int_0^5 88.2\pi x dx=88.2\pi(\frac{x^2}{2})\Big|_0^5=88.2\cdot\pi\cdot\frac{25}{2}\approx 3462\quad (\text{kJ})$$

案例 2［克服阻力所作的功］ 一物体按规律 $x=ct^3$ 作直线运动，媒质的阻力与速度的平方成正比，计算物体由 $x=0$ 到 $x=a$ 时，克服阻力所作的功.

解：由于媒质的阻力与速度的平方成正比，设比例系数为 k，于是媒质的阻力为

$$F=k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=9kc^2t^4,$$

在$[x,x+dx]$上克服阻力所作的功(功的微元)为

$$dW=k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2dx=9kc^2t^4d(ct^3)=27kc^3t^6dt\ ,$$

当物体由$x=0$移动到$x=a$时，时间t从$t=0$到$t=\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}$，克服阻力所作的功为

$$W=\int_0^{\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}}27kc^3t^6dt=27kc^3\int_0^{\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}}t^6dt=27kc^3\left(\frac{1}{7}t^7\right)\Bigg|_0^{\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}.$$

案例 3［挖掘问题］一口深为 20m 水井，长期使用后产生了大量的淤泥需要清除。现考虑用缆绳将抓斗放入井底抓起淤泥提出井口，缆绳每米重 40N,抓斗自重 300N,每次抓斗抓起的淤泥重 2000N,上升速度为 2m/s,而在抓斗上升的过程中，淤泥以 10N/s 的速 度从抓斗的缝隙中泄漏。如果把抓起的淤泥拉升到井口，那么拉力需做多少焦耳的功?(抓斗的高度和井口上方的缆绳长度忽略不计)

解：设W_1是克服缆绳自重做的功

W_2是克服抓斗重力做的功

W_3是克服淤泥的重力做的功

则抓斗抓起淤泥升至井口所做的功$W=W_1+W_2+W_3$

由已知将抓斗由x处提升到$x+dx$处时，缆绳克服重力所做的功元素$dW_1=40(20-x)dx$

$$W_1=\int_0^{20}40(20-x)dx=8000\ (\text{J})$$

$$W_2=300\times20=6000\ (\text{J})$$

在时间$[t,t+dt]$内提升淤泥所做的功为$dW_3=2(2000-10x)dx$淤泥从井底到井口所需时间为 $\frac{20}{2}=10\ (\text{s})$

$$\therefore\quad W_3=\int_0^{10}2(2000-10x)dx=39000\ (\text{J})$$

$$W=W_1+W_2+W_3=53000\ \ (\text{J})$$

案例 4［做功问题］将半径为R的球沉入水中，假设球的比重与水相同，球的上部与水面相切。若将球从水中取出，需做多少功?

解：建立坐标系以水面作y轴，球的水面的顶为原点铅直 向下为x轴的正向(圆的方程为$(x-R)^2+y^2=R^2$)

取x为积分变量$x\in[0,2R]$对应于区间$[x,x+dx]$的球的薄片体积

$$dV=\pi(\sqrt{2Rx-x^2})^2dx=\pi(2Rx-x^2)dx$$

由于该部分在水面下重力与浮力的合力为零(密度相同) 牵引力的大小

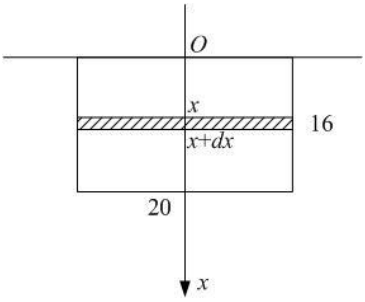
$$dF=\pi g(2Rx-x^2)dx,\quad dW=\pi g(2Rx-x^2)xdx$$

将球从水中完全取出所需做的功为

$$W=\int_0^{2R}\pi g(2Rx-x^2)xdx=\frac{4}{3}\pi R^4 g$$

第9节　压力与引力

案例 1 [水闸门所受的压力] 一矩形水闸门，宽 20m，高 16m，水面与闸门顶齐，如右图所示，求闸门上所受的总压力.



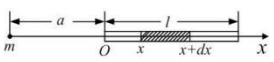
解：如图选取x轴，在$[x,x+dx]$上闸门所受压力(压力微元) 为 $dF=pdA=rx\cdot 20dx=20rxdx$，

闸门上所受的总压力为

$$F=\int_0^{16}20rxdx=20r\int_0^{16}xdx=20r(\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^{16}=2560r,$$

当 $r=1000\times 9.8$ N/m^3 时，力 $F=2560\cdot 9800=2.5088\times 10^7$ (N).

案例 2[棒对质点的引力] 设有一长度为l，质量为M的均匀细直棒，另有一质量为m的质点与细直棒在同一直线上，它到细直棒的



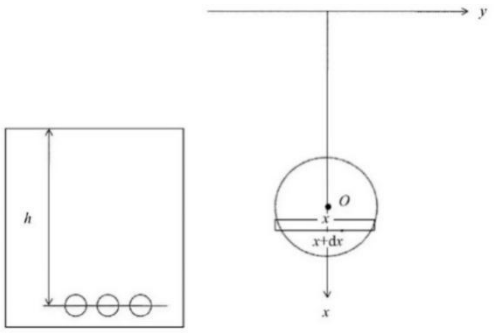
近端距离为a,如下图所示. 试计算该棒对质点的引力.

解：建立直角坐标系如图所示，使棒位于x轴上，取x为积分变量，它的变化区间为$[0,l]$. 设$[x,x+dx]$为$[0,l]$上的任一小区间. 把细直棒上相应于$[x,x+dx]$的一段近似地看成质点，其质量为$\frac{M}{l}dx$. 于是引力微元为 $dF=\frac{km\frac{M}{l}dx}{(x+a)^2}$，

该棒对质点的引力为

$$F=\int_0^l k\frac{m\cdot\frac{M}{l}}{(x+a)^2}\mathrm{d}x=\frac{kmM}{l}\int_0^l\frac{1}{(x+a)^2}\mathrm{d}x=\frac{kmM}{l}\left(-\frac{1}{x+a}\right)\Big|_0^l=\frac{kmM}{a(l+a)}.$$

案例 3[螺栓计数]有一罐形容器，装有密度为ρ的液体，现在罐体下部侧面开一个半径为R的圆孔，圆孔的中心距液面距离为h,孔口用挡板加螺栓固定，已知每个螺栓都承受的力为G，问需要多少个螺栓才能使容器安全?



解：先计算挡板所受的侧压力，建立如图所示直角坐标系。

由微元分析法：$dF=\rho g(h+x)dA=\rho g(h+x)\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}dx$

$\therefore\quad F=\int_{-R}^{R}dF=2\rho g\int_{-R}^{R}(h+x)\cdot\sqrt{R^2-x^2}dx=\pi\rho ghR^2$

例如：ρ=1000kg/m³, R=50cm, g=9.8m/s², h=70cm, G=49(kN)

$F=\pi\rho ghR^2\approx 3.14\times1000\times9.8\times70\times(0.5)^2\approx539$(kN)

则所需螺栓个数为 539÷49=11(颗)。

第10节　函数的平均值

案例 1［平均销售量］ 一家快餐连锁店在广告后第t天销售的快餐数量由下式给出：$S(t)=20-10e^{-0.1t}$,求该快餐连锁店在广告后第一周内的日平均销售量.

解：该快餐连锁店在广告后第一周内的日平均销售量$\overline{S}$为

$$\overline{S}=\frac{1}{7}\int_0^7(20-10e^{-0.1t})dt=\frac{1}{7}[\int_0^7 20dt-10\int_0^7 e^{-0.1t}dt]=20+\frac{100}{7}\int_0^7 e^{-0.1t}d(-0.1t)$$

$$=20+\frac{100}{7}(e^{-0.1t})\Big|_0^7\approx 12.808.$$

案例 2［交流电的平均功率］ 在电机、电器上常会标有功率、电流、电压的数字.如电机上标有功率 2.8KW，电压 380V．在灯泡上标有 4W，220V 等．这些数字表明交流电在单位时间内所做的功以及交流电压．但是交流电流，电压的大小和方向都随时间作周期性的变化，怎样确定交流电的功率、电流、电压呢？

(1)直流电的平均功率　　平均功率又称为有功功率（active power）,由电工学知，电流在单位时间所做的功称为电流的功率 P，即$P=\frac{W}{t}$ 直流电通过电阻 R，消耗在电阻 R 上的功率（即单位时间内消耗在电阻 R 上的功）是$P=I^2R$，其中 I 为电流，因直流电流大小和方向不变，所以 I 是常数，因而功率 P 也是常数．若要计算经过时间t消耗在电阻上的功，则有$W=Pt=I^2Rt$.

(2)交流电的平均功率　对交流电，因交流电流$i=i(t)$不是常数，因而通过电阻 R 所消耗的功率$P(t)=I(t)^2R$也随时间而变．由于交流电随时间 t 在不断变化，因而所求的功 W 是一个非均匀分布的量，可以用定积分表示．交流电虽然在不断变化，但在很短的时间间隔内，可以近似地认为是不变的（即近似地看作是直流电），因而在dt时间内对“$i=i(t)$”以常代变，可得到功的微元:$dW=Ri^2(t)dt$，在时间$[t_0,t]$内电阻元件的热量 q，也就是这段时间内吸收（消耗）的电能 W 为

$$W=\int_{t_0}^{t}Ri^2(t)dt=\int_{t_0}^{t}\frac{u^2(t)}{R}dt,$$

在一个周期 T 内消耗的功率为　$W=\int_0^T Ri^2(t)dt=\int_0^T\frac{u^2(t)}{R}dt$,

因此，交流电的平均功率为 $\overline{P}=\dfrac{W}{T}=\dfrac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)dt$.

案例 3［交流电的有效值］电源的引线端的电压 u 由关于时间 t（单位：s）的函数为 $u(t)=U_0\cos(120\pi t)$（单位：伏），U_0 是表示最大电压的常数．其在 1s 内电压的平均值是 $\overline{U}=\int_0^1 u(t)dt=\int_0^1 U_0\cos(120\pi t)dt=0$ ．但工程师们不用平均电压，他们运用均方根电压，其定义为 $\overline{U}=\sqrt{u^2}$ 的平均值 ，即 $\overline{U}=\sqrt{\dfrac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$ ．

求 $\overline{U}$ 为 U_0 的函数．

解：$\overline{U}=\sqrt{\dfrac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}=\sqrt{\int_0^1 {U_0}^2\cos^2(120\pi t)dt}=U_0\sqrt{\int_0^1\dfrac{1+\cos(240\pi t)}{2}dt}$

$$=U_0\sqrt{\int_0^1[\frac{1}{2}+\frac{\cos(240\pi t)}{2}]dt}=U_0\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{240\pi}\int_0^1\cos(240\pi t)d(240\pi t)}$$

$$=U_0\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{480\pi}[\sin(240\pi t)]\Big|_0^1}=\frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

案例 4［交流电的平均功率］设交流电 $i(t)=\mathrm{I_m}\sin\omega t$，其中 $\mathrm{I_m}$ 是电流最大值（峰值），ω 为角频率，而周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$．若电流通过纯电阻电路，设电阻 R 为常数，则平均功率为

$$\overline{P}=\frac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)dt=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}R\,{\mathrm{I_m}}^2\sin^2\omega t dt$$

$$=\frac{\omega RI_m^2}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2\omega t dt=\frac{\omega RI_m^2}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1-\cos 2\omega t}{2}dt$$

$$=\frac{\omega RI_m^2}{4\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}(1-\cos 2\omega t)dt=\frac{\omega RI_m^2}{4\pi}(t-\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t)\Big|_0^{\frac{\omega}{2\pi}}=\frac{RI_m^2}{2}$$

案例 5［整流的平均值与有效值］交流电压 $u(t)=U_\mathrm{m}\sin\omega t$ 经半波整流后为

$$u(t)=\begin{cases}U_\mathrm{m}\sin\omega t & 0\le t\le\dfrac{\pi}{\omega}\\ 0 & \dfrac{\pi}{\omega}\le t\le\dfrac{2\pi}{\omega}\end{cases},$$

求在一周期内电压的平均值与有效值．

解：由整流平均值（整流平均值：电压在一个周期内的平均值）公式

$$\overline{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

得电压平均值

$$\overline{U}=\frac{\omega}{2\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}U_{\mathrm{m}}\sin\omega t dt+\int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}0dt$$

$$=\frac{\omega U_m}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin\omega t dt=\frac{\omega U_m}{2\pi}(-\frac{1}{\omega}\cos\omega t)\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}=-\frac{U_m}{2\pi}(-1-1)=\frac{U_m}{\pi}\approx 0.318U_m$$

有效值

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}=\sqrt{\frac{1}{2\pi}(\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}U_m^2\sin^2\omega t dt+\int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}0\cdot dt)}=\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}U_m^2\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin^2\omega t dt}$$

$$=\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}U_m^2\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\frac{1-\cos 2\omega t}{2}dt}=\sqrt{\frac{\omega}{4\pi}U_m^2(\left|t-\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}}=\sqrt{\frac{\omega}{4\pi}U_m^2\frac{\pi}{\omega}}=\frac{U_m}{2}$$

第四章　微分方程

第1节　可分离变量的微分方程

案例 1［**第二宇宙速度**］地球对物体的引力 F 与物体的质量 m 以及物体离地心的距离 s 之间的关系为 $F=-\dfrac{mgR^2}{s^2}$ ，其中 g 是重力加速度，R 为地球半径. 验证：如果物体以 $v_0\geq\sqrt{2gR}$ 的初速度发射，则永远不会返回地球

解： 由牛顿第二定律 $F=ma$ ，其中 $a=\dfrac{dv}{dt}$ ，有

$$F=ma=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=m\frac{dv}{ds}v\ ,$$

故有 $$mv\frac{dv}{ds}=-mg\frac{R^2}{s^2}\ ,$$

变量分离，得 $$v\mathrm{d}v=-gR^2s^{-2}\mathrm{d}s\ ,$$

两边积分 $$\int v\mathrm{d}v=-gR^2\int s^{-2}\mathrm{d}s\ ,$$

得 $$\frac{v^2}{2}=\frac{gR^2}{s}+C\ ,$$

将条件 $s=R$ 、$v=v_0$ 代入上式，得 $C=\dfrac{1}{2}v_0^2-gR$ ，即

$$v^2=\frac{2gR^2}{s}+v_0^2-2gR\ .$$

由此可见，当 s 很大时，$\dfrac{2gR^2}{s}$ 很小，即当 $v_0\geq\sqrt{2gR}=11.2\,(km/s)$ （我们称 $v_0=11.2\,(km/s)$ 为第二宇宙速度）时，速度 v 永远大于 0，所以物体永远不会返回地面.

案例 2［**环境污染问题**］某水塘原有 50000 吨清水(不含有害杂质)，从时间 $t=0$ 开始，含有有害杂质5%的浊水流入该水塘. 流入的速度为 2 吨 / 分，在塘中充分混合(不考虑沉淀)后又以 2 吨 / 分的速度流出水塘. 问经过多长时间后塘中有害物质的浓度达到4% ？

解：设在时刻t塘中有害物质的含量为$Q(t)$，此时塘中有害物质的浓度为$\frac{Q(t)}{50000}$，于是$\frac{dQ}{dt}$表示单位时间内有害物质的变化量，即单位时间内流进塘内有害物质的量减去单位时间内流出塘的有害物质的量，故

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{5}{100}\times 2-\frac{Q(t)}{50000}\times 2=\frac{1}{10}-\frac{Q(t)}{25000},$$

上式是可分离变量方程，分离变量并积分得

$$Q(t)-2500=Ce^{-\frac{t}{25000}}.$$

由初始条件$t=0$，$Q=0$得$C=-2500$，故

$$Q(t)=2500\left(1-e^{-\frac{t}{25000}}\right).$$

塘中有害物质浓度达到4%时，应有$Q=50000\times 4\%=2000$（吨），这时t应满足$2000=2500\left(1-e^{-\frac{t}{25000}}\right)$.

由此解得$t\approx 40236$（分）$=670.6$（小时），即经过670.6小时后，塘中有害物质浓度达到4%，由于$\lim\limits_{t\to+\infty}Q(t)=2500$，塘中有害物质的最终浓度为$5\%$.

案例 3 **[刑事侦察中死亡时间的鉴定]**牛顿冷却定律指出：物体在空气中冷却的速度与物体温度和空气温度之差成正比，现将牛顿冷却定律应用于刑事侦察中死亡时间的鉴定．当一次谋杀发生后，尸体的温度从原来的37℃按照牛顿冷却定律开始下降，如果两个小时后尸体温度变为35℃，并且假定周围空气的温度保持20℃不变，试求出尸体温度H随时间t的变化规律．又如果尸体发现时的温度是30℃，时间是下午4点整，那么谋杀是何时发生的？

解　设尸体的温度为$H(t)$，其冷却速度为$\frac{dH}{dt}$，根据题意，$\frac{dH}{dt}=-k(H-20)$，即得微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-k\left(H-20\right)\\ H\left(0\right)=37\end{cases},$$

其中$k>0$是常数．分离变量并求解得

$$H-20=Ce^{-kt}.$$

代入初值条件$H(0)=37$，求得$C=17$．于是得该初值问题的解为

$$H=20+17e^{-kt}.$$

为求出k值，根据两小时后尸体温度为35℃这一条件，有

$$35=20+17e^{-k\cdot 2},$$

求得$k\approx 0.063$，于是温度函数为

$$H=20+17e^{-0.063t},$$

将$H=30$代入式(6-24)求解t，有 $\frac{10}{17}=e^{-0.063t}$，即得$t\approx 8.4$（小时）.

于是，可以判定谋杀发生在下午4点尸体被发现前的8.4小时，即8小时24分钟，所以谋杀是在上午7点36分发生的.

案例4**[国民生产总值]**2010年我国的国民生产总值(GDP)为6.5万亿美元。如果我国能保持每年8%的相对增长率，问到2020年我国的GDP是多少?

解：第一步，建立微分方程

记2010年时$t=0$,第t年我国的GDP为$G(t)$。从2010年起GDP的相对增长率为8%,则 $\frac{\frac{dG(t)}{dt}}{G(t)}=8\%$

得微分方程$G'(t)=0.08G(t)$,且$G(0)=6.5$(万亿美元)

第二步，求微分方程的通解,此方程为可分离变量的方程，分离变量，得

$$\frac{dG(t)}{G(t)}=0.08dt$$

积分，得 $\ln G(t)=0.08t+\ln C$

即 $$G(t)=Ce^{0.08t}$$

最后一步，求微分方程的特解,将$G(0)=6.5$代入通解，得$C=6.5$。

所以，从2010 年起第t年，我国的国民生产总值为$G(t)=6.5e^{0.08t}$。

将$t=2020-2010=10$代入上式，得2020年我国的GDP预测值为

$G(10)=6.5e^{0.08\times 10}\approx 14.33$(万亿美元)

案例 5 [**人口模型**]英国人口学家马尔萨斯(Malthus,1766—1834)根据百余年的人口统计资料，与 1798 年提出了人口指数增长模型。他的基本假设是：单位时间内人口的增长量与当时的人口总数成正比，若已知$t=t_0$时的人口总数为x_0，试根据马尔萨斯假设确定出时间t与人口总数$x(t)$之间的函数关系。根据我国国家统计局 1990 年 10 月 30 日发表的公报，1990 年 7 月 1 日我国人口总数为 11.6 亿，过去 8 年的年人口平均增长率为 14.8‰,若今后的年增长率保持这个数字，试用马尔萨斯方程预报 2000 年我国的人口总数。

解：记时间t时的人口总数为$x(t)$，设单位时间内人口的增长量与当时人口总数之比为r，r是与时间无关的常数，根据马尔萨斯假设，

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=r\cdot x(t)$$

令$\Delta t\to 0$，得下述微分方程：

$$\begin{cases}x'(t)=rx(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

这是一个可分离变量的方程，容易解出方程满足初始条件的解为

$$x(t)=x_0e^{r(t-t_0)}$$

将$t=2000,t_0=1990,r=0.0148$代入，可预报出 2000 年我国的人口总数为

$$x(2000)=11.6e^{0.0148(2000-1990)}\approx 13.45\text{(亿)}$$

案例 6 [**环境污染**]某池塘原有 20000 吨清水(指不含有害杂质)，从时间$t=0$开始，含有有害杂质 5%的浊水流入该池塘。流入的速度为 5t/min。 在塘中充分混合(不考虑沉淀)后又以 2t/min 的速度流出池塘。问

(1)经过多长时间后塘中有害物质的浓度达到 4%.

(2)在经过相当长时间后，池塘中有害物质的浓度会达到 15%吗?

解：第一步，建立微分方程

设在时刻t池塘中的有害物质含量为$Q(t)$。此时有害物质浓度为$\frac{Q(t)}{20000}$，$\frac{dQ}{dt}$是单位时间内塘中有害物质的变化量。

$$\frac{dQ}{dt}=5\%\times 5-\frac{Q(t)}{20000}\times 2=\frac{1}{4}-\frac{Q(t)}{10000}$$

第二步，求微分方程的通解

该微分方程是可分离变量方程，分离变量后，得

$$\frac{dQ}{2500-Q(t)}=\frac{1}{10000}dt$$

积分，得 $Q(t)-2500=Ce^{-\frac{t}{10000}}$

即 $Q(t)=2500+Ce^{-\frac{t}{10000}}$

最后，求出方程的特解

由$t=0$时$Q=0$,得，$C=-2500$，

故 $Q(t)=2500(1-e^{-\frac{t}{10000}})$

当水塘中有害物质浓度达到4%时，应有有害物质 $Q=2000\times4\%=800$(t)

此时，$800=2500(1-e^{-\frac{t}{10000}})$,解得$t\approx3810$(min)

即经过约3810min 后，池塘中有害物质浓度可达到4%.

（由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}Q(t)=2500$ ），可见池塘中的有害物质最终浓度只会达到 $\frac{2500}{20000}=12.5\%$,无论经过多长时间，有害物质浓度也不会达到15%。

案例8 [**技术推广**]新技术的推广、应用一般是通过已掌握新技术的人向某一人群进行推广和传播的。假设该人群的总人数为N，在$t_0=0$时刻已掌握新技术的人数为a，在任意时刻t已掌握新技术的人数为$y(t)$（将$y(t)$视为连续的可微变量),其变化率与已掌握新技术的人数与未掌握新技术的人数之积成正比,比例常数$k>0$,求$y(t)$。

解：由题意建立微分方程

$$\frac{dy}{dt}=ky(N-y),y(0)=a$$

方程为可分离变量方程，解微分方程得 $y=\frac{NCe^{kNt}}{1+Ce^{kNt}}$

将$y(0)=a$代入微分方程的解得 $C=\frac{a}{N-a}$

故所求解 $y=\frac{aNe^{kNt}}{N-a+ae^{kNt}}$

案例8 [**函数关系**]设仪器在重力的作用下，从海试船上从海平面由静止开始铅

直下沉，在仪器下沉的过程中受到阻力和浮力的作用。假设仪器的质量为m，体积为A，海水的比重为ρ，仪器所受阻力与下沉速度成正比，比例系数为$k(k>0)$，试建立仪器下沉的深度y与下沉速度v满足的微分方程，并求y与v的函数关系式。

解：取沉放点为原点O,y轴的正方向铅直向下，由牛顿第二定律可得

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-A\rho-kv$$

初始条件：$v(0)=0, y(0)=0$。

其中$v=\dfrac{dy}{dt}$，将y转化成v的关系：

$\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right)=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dy}\dfrac{dy}{dt}=v\dfrac{dv}{dy}$（将$v$看成$y$的函数）

$\therefore mv\dfrac{dv}{dy}=mg-A\rho-kv$，为可分离变量的微分方程 求解得

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-A\rho)}{k^2}\ln(mg-A\rho-kv)+C$$

由初始条件$v(0)=0, y(0)=0$ 得

$$C=\frac{m(mg-A\rho)}{k^2}\ln(mg-A\rho)$$

$$\therefore\quad y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-A\rho)}{k^2}\ln\frac{mg-A\rho-kv}{mg-A\rho}$$

案例 9 **[降污问题]**某湖泊的水容量为V，由于受上游排污的影响，每年流入湖泊内含污染物甲的污水量为$\dfrac{V}{6}$，流入湖泊内不含污染物甲的污水量为$\dfrac{V}{6}$，流出湖泊的水量为$\dfrac{V}{3}$。假设 2009 年年底湖中甲物的含量为 5m，超过了国家规定的指标。为了保护环境，治理污染，从 2010 年起，对排入湖泊中含甲污水的浓度限定为不超过$\dfrac{m_0}{V}$，求至少经过多少年，湖泊中污染物甲的含量会降至m_0以内?(假设湖中污染物甲的浓度是均匀的)

解：设从 2010 年年初(令此时$t=0$)开始，第t年湖泊中的污染物甲的总量为m，浓度为$\dfrac{m}{V}$，则在时间间隔$[t,t+dt]$内，排入湖泊中甲的量为

$$\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}dt=\frac{m_0}{6}dt$$

流出湖泊中污染物甲的量为

$$\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}dt=\frac{m}{3}dt$$

所以在此时间段内湖泊中污染物甲的改变量

$$dm=(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})dt$$

初始条件$m(0)=5m_0$

解可分离变量方程得

$$m=\frac{m_0}{2}-Ce^{-\frac{t}{3}}$$

代入初始条件得 $C=-\frac{9m_0}{2}$

所以 $m=\frac{m_0}{2}(1+9e^{-\frac{t}{3}})$

令$m=m_0$，解得 $m=6\ln 3\approx 6.59$

所以最多经过6.59年，湖泊中污染物甲的含量可降至m_0以内。

案例 10 [**雪融化**]雪遇热会渐渐融化，一个半球体的雪堆，其体积融化的速度与半球面的面积成正比，比例系数为$k(k>0)$，假设雪堆融化时始终保持半球体状态。已知半径为r的雪堆在开始融化的3小时内，融化了体积的$7/8$，问雪堆全部融化需多长时间?

解：设t时刻雪堆的体积$V=\frac{2}{3}\pi r^3$，半球面的表面积$S=2\pi r^2$

由已知： $\frac{dV}{dt}=2\pi r^2\frac{dr}{dt}=-kS=-2\pi kr^2$

$\therefore\ \frac{dr}{dt}=-k$ 且 $r(0)=r_0$

解微分方程得通解$r=-kt+C$， 由初始条件得$C=r_0$

所以 $r=r_0-kt$

又因 $V(3)=\frac{1}{8}V_0$得

$$\frac{2}{3}\pi(r_0-3k)^3=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\pi r_0^3$$

解得 $$k=\frac{1}{6}r_0$$

雪堆全部融化时$r=0$可得$t=6$

案例 11 **[降温问题]**设暖水瓶内热水温度为T，室内温度为T_0，t为时间(单位：小时)，根据实验，热水温度的降低率与$T-T_0$成正比，求T与t的函数关系。

解：由题意，T满足的方程为$\frac{dT}{dt}=-k(T-T_0),k>0$为常数，取负号是由于$\frac{dT}{dt}<0$。此方程为可分离变量方程，分离变量，两边积分，得通解

$$T=T_0+Ce^{-kt}$$ （C为任意常数）。

案例 12**[质量推算]**当陨石穿过大气层向地面高速坠落时，陨石表面与空气摩擦所产生的高热使陨石的质量不断挥发，试验表明，陨石挥发的速度与陨石的表面积成正比。若假设陨石是质量均匀的球体，试求出陨石的质量m关于时间t的函数表达式。

解：设t时刻陨石的半径为$r(t)$，质量为$m(t)$，表面积为$S(t)$。由题设可知

$$S(t)=4\pi r^2(t),m(t)=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3(t)$$，

消去$r(t)$后，得，$S(t)=4\pi\left[\frac{3m(t)}{4\pi\rho}\right]^{\frac{2}{3}}$

根据题意

$$m'(t)=-kS(t)=-4k\pi(\frac{3}{4\pi\rho})^{\frac{2}{3}}[m(t)]^{\frac{2}{3}}=-a[m(t)]^{\frac{2}{3}}$$

其中， $$a=4k\pi(\frac{3}{4\pi\rho})^{\frac{2}{3}}$$

由分离变量法计算可得 $m(t)=(\frac{C-at}{3})^{\frac{2}{3}}$

若陨石到达地面的时刻为t_0，此时陨石的质量为m_0，根据此初始条件可求出

$$C=3\sqrt[3]{m_0}+at_0$$

代入求出 $$m(t)=[\sqrt[3]{m_0}+\frac{a}{3}(t_0-t)]^3$$

其中，$$a=4k\pi(\frac{3}{4\pi\rho})^{\frac{2}{3}}.$$

第2节　一阶线性微分方程

案例 1 [**葡萄糖制作**]一容器内盛有 100L 的葡萄糖水溶液，其中含有 20g 的葡萄糖。现将每升含葡萄糖 2g 的溶液以 10L/min 的速度注入容器，并不断进行搅拌，使混合液迅速达到均匀。同时，混合液以 5L/min 的速度流出。问在任意时刻t容器中含有葡萄糖多少克?

解：第一步，建立微分方程

设t时刻容器中含葡萄糖量为x克，容器中含葡萄糖量的变化率为

$\frac{dx}{dt}$=葡萄糖流入容器的速度－葡萄糖流出容器的速度

其中，葡萄糖流入容器的速度=2(g/L)×10(L/min)=20(g/min)，葡萄糖流出容器的速度=$\frac{x}{100+10t}$(g/L)×5(L/min)=$\frac{5x}{100+10t}$(g/min)

因此，有

$$\frac{dx}{dt}=20-\frac{5x}{100+10t}$$

第二步，求上述微分方程的通解

易知，此为一阶线性非齐次方程，由通解公式知

$$x=e^{-\int\frac{5x}{100+10t}dt}[\int 20\cdot e^{\int\frac{5x}{100+10t}dt}dx+C]$$

$$=C(100+10t)^{-\frac{1}{2}}+\frac{40}{3}t+\frac{400}{3}$$

最后，求特解

由题意知，有初始条件$x|_{t=20}=20$,代入通解，得$C=-\frac{3400}{3}$

所以，在时刻t容器内的含盐量为$x=\frac{40}{3}t+\frac{400}{3}-\frac{3400}{3}(100+10t)^{-\frac{1}{2}}$(g)

案例 2 [**降温问题**]经实验得知物体在露天中冷却的速度与物体及露天空气的温度成正比。设有一瓶热水，水温是 100℃,此时的空气温度为 10℃,经过 10 小时后，瓶内水温绛到 70℃,求瓶内水温的变化规律。

解：设时间为t时温度为T，显然$T=T(t)$

由已知

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-10),(t>0,\frac{dT}{dt}<0,T\geq 0)$$

解一阶线性微分方程得

$$T=Ce^{-kt}+10$$

又因$T(0)=100$，所以 $C=90$

特解 $$T=90e^{-kt}+10$$

又因$T(10)=70$，代入上式解得

$$k=\frac{1}{10}\ln\frac{3}{2}\approx 0.4055$$

瓶内温度与时间的函数关系：$T=90e^{-0.4055t}+10$

案例 3[**减速问题**]已知物体在静水中的运动速度与水的阻力成正比，若一汽艇以20km/h的速度在静水中关闭了发动机，经过10秒后汽艇的速度降至$v=10$km/h，求发动机停止2分钟后汽艇的速度。

解：设发动机关闭后t时刻的汽艇水速为$v=v(t)$

阻力$f=-kv$ （$k>0,f$与v反向）

由牛顿第二定律 $m\cdot\frac{dv}{dt}=-kv$ （其中m表示汽艇质量）

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=0$$

解微分方程得

$$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

$\because v(0)=20$km/h，$\therefore C=20,\quad v(t)=20e^{-\frac{k}{m}t}$

由已知$v(\frac{10}{3600})=10$，代入上式解得

$$\frac{k}{m}=360\ln 2 \quad \therefore \quad v(t)=20e^{-360\ln 2\cdot t}$$

$$\therefore \quad v(\frac{2}{60})=20e^{-360\ln 2\cdot\frac{2}{60}}=20\cdot(0.5)^{12}\approx 0.004883$$ （km/h）

例 4 [**二氧化碳含量**]人类的工业生产与生活要释放出温室气体CO_2。释放CO_2

的速度是固定的，每年排出a吨。植物光合作用需要吸收CO_2,CO_2越多，光合作用越强，植物吸收CO_2越快，生长越茂盛。CO_2如果彻底没了，植物全都“饿”死，动物则间接“饿”死。因此，植物吸收CO_2的速度与当时大气里CO_2的含量成正比。列出描述大气层里CO_2含量的微分方程并求解，自变量是时间t。当时刻$t=0$，大气中二氧化碳含量是$G(0)$。

解：设时刻t时，大气层里二氧化碳含量为$G(t)$。二氧化碳含量变化的速率等于增加速率a与减少速率$kG(t)$的差，k是比例常数。即

$$\frac{dG}{dt}=a-kG$$

一阶非齐次线性微分方程，代入通解公式，得通解为

$$G(t)=\frac{a}{k}+Ce^{-kt}$$

初始条件是

$$G(0)=\frac{a}{k}+C\text{，得}\quad C=G(0)-\frac{a}{k}$$

所以

$$G(t)=\frac{a}{k}+[G(0)-\frac{a}{k}]e^{-kt}$$

注：本题还可衍生为 (1)往生物体内匀速注射某种药物或物质，生物体自己具有分解该药物活物质的能力，分解速度与当时的含量成正比。求该药物或物质含量的函数。

(2)由于灾害，核反应堆与核电站受损，放射性污染物源源不断匀速泄 露出来污染环境，与此同时，泄露出的放射性元素具有衰变现象，含量会减少，衰变速度与当时的含量成正比。求放射性元素含量的函数。

(3)假设药物或污染物不再源源不断产生，求药物或污染物含量变化的函数，是最简单的情形。

案例 5[**年代推算**]问题背景：

(1)考古地质等学科里常用^{14}C测定法，称为碳定年代法，^{14}C是^{12}C的同位素。所不同的是^{14}C放射性元素会衰变。其他性质与^{12}C没差别。宇宙射线照射在大气分子上，使之产生中子，中子与氮气作用生成元素^{14}C,这种^{14}C氧化后成为CO_2,被植物吸收，动物吃植物，动物之间还有食物链，这样^{14}C就传递到各种

动植物体内，无论他们活着或死去或变为化石。^{14}C是放射性的，无论任何时候它都在不断衰变。活着的生物通过新陈代谢不断吸收食物与空气中的^{14}C， 其体内的^{14}C含量百分比与空气中相同，达到平衡，古代现代都相同，因为大气中^{14}C含量没变化过。但是死亡后停止摄取^{14}C,尸体内^{14}C由于 衰变而不断减少。根据^{14}C含量减少的情况可以判断生物生活在古代的大致年代。

(2)物体内的^{14}C含量很难真正测得，但是可以测得^{14}C的衰变减少的量，除以测试所用的时间长度，得到衰变速度。放射性元素衰变速度与当时元素含量成正比，可以间接推知其体内的^{14}C含量。

(3)通常认为中国古代文明最早出现在中原河南，那里出土了殷商时期的文物实物，考古结论是距今约 3600 年。更早的夏朝与尧舜禹至今尚无任何出土文物实物为证，只存在于书籍与传说中，耳听为虚，不能眼见为实。公元 2000 年左右，在四川广汉出土了一些奇怪的古代文物，也有人类与动植物尸骨，以及各种灰烬、木炭、青铜器。有人猜测这是中原先民迁徙到四川带来的中原文明，但是这些文物的形象与中原的完全不一样，尤其人俑与面具等面部特征与中原的极为不同。有人推断这可能是另一个与中原文化独立的，互不影响的另一支文明，并设法证明其年代远在殷商之前。

(4)三星堆出土的灰烬或木炭之类的物品中，^{14}C原子衰变速度是 17.21 次/分。而新砍伐烧成的木炭或灰烬中^{14}C的衰变速度是 38.37 次/分。^{14}C的半衰期是 5568 年，即^{14}C衰变后只剩下最初含量的一半所需的时间。新鲜炭灰里的^{14}C含量百

分比与大气中相同，从远古至今都没变化，因此其新鲜炭灰里的^{14}C衰变速度是固定的。碳的半衰期是^{14}C元素自身固有的，从远古至今也不变化。试估算三星堆文物距今年代。

解：从三星堆文物被掩埋在地下开始，第t年，文物中的^{14}C含量为$x(t)$，

由衰变速度与含量成正比，得微分方程

$$\frac{dx}{dt}=-kx，\quad k>0\text{为比例常数。}$$

负号表示^{14}C含量递减，导数$\frac{dx}{dt}<0$。该微分方程通解是

$$x(t)=Ce^{-kt}。$$

设文物刚掩埋的时间$t=0$. 那时^{14}C含量x_0, 代入通解得特解

$$x(t)=x_0e^{-kt} \tag{1}$$

^{14}C的半衰期为$T=5568$年。则$x(T)=x_0e^{-kt}=\frac{x_0}{2}$，得

$k=\frac{\ln 2}{T}$，所以$x(T)=x_0e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$，

解出
$$t=\frac{T}{\ln 2}\ln\frac{x_0}{x(t)} \tag{2}$$

文物内初始^{14}C的含量x_0，与现在^{14}C的含量$x(t)$都不好测定。所以不容易算出t。对式(1)两边求导

$$x'(t)=-x_0ke^{-kt}=-kx(t) \tag{3}$$

令$t=0$ 代入

$$x'(0)=-kx(0)=-kx_0 \tag{4}$$

将式（4）除以式（3）得

$$\frac{x'(0)}{x'(t)}=\frac{x_0}{x(t)} \tag{5}$$

代入式(2),得

$$t=\frac{T}{\ln 2}\ln\frac{x'(0)}{x'(t)} \tag{6}$$

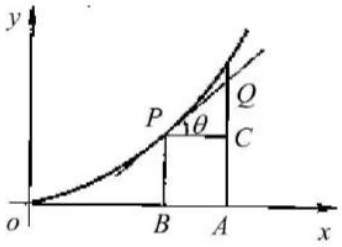
现在已知$x'(0)=38.37, x'(t)=17.21, T=5568$,代入式(6)得$t=6440$年。结论是三星堆文明大致在6440年前。比殷商文明早3000多年，应该和殷商文明没有关系。那么中华文明历史的源头，除了中原，也可以说还有四川的古蜀文明。

注：式(5) $\frac{x'(0)}{x'(t)}=\frac{x_0}{x(t)}$还可以不加推导直接观察得到，衰变速度与含量成正比，比例系数永远是固定的。含量多，则衰变速度快，含量少则衰变速度慢。所以两个不同时刻的^{14}C的含量之比，可以换成用两个时刻的^{14}C衰变速度之比来代替。^{14}C的含量不容易测得，^{14}C的衰变速度却容易测得。

第3节　可降阶的微分方程

案例 1 [**鱼雷追踪**]如图所示的坐标系中，位于坐标原点的P舰向位于x轴上$(1,0)$点处的Q舰发射制导鱼雷，Q舰以恒速V 向平行于y轴的方向前进，鱼

雷的速率为$2v_0$,且始终对准Q舰，求鱼雷追踪Q舰的航行曲线方程。



解：设鱼雷的航行曲线方程为$y=y(x)$,在经过时间t后，鱼雷位于点$P(x,y)$,而Q舰的坐标是$(1,v_0t)$

鱼雷始终对准Q 舰，那么

$$y'=\frac{v_0t-y}{1-x} \tag{1}$$

鱼雷航行时间t后的位移为曲线OP,所以

$$\int_0^x\sqrt{1+(y')^2}dx=2v_0t \tag{2}$$

联立(1),(2)两式得到

$$(1-x)y'+y=\frac{1}{2}\int_0^x\sqrt{1+(y')^2}dx$$

求导得到

$$(1-x)y''=\frac{1}{2}\sqrt{1+(y')^2} \tag{3}$$

现求解微分方程 $\begin{cases}(1-x)y''=\frac{1}{2}\sqrt{1+(y')^2}\\ y(0)=0\\ y'(0)=0\end{cases}$

令$y'=p,y''=p'=\frac{dp}{dx}$,方程化为$(1-x)p'=\frac{1}{2}\sqrt{1+p^2}$分离变量得到

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{2(1-x)}dx,$$

积分得到

$$p+\sqrt{1+p^2}=C_1(1-x)^{\frac{1}{2}},$$

由 $y(0)=0$，有 $C_1=1$，所以 $y'+\sqrt{1+(y')^2}=(1-x)^{\frac{1}{2}}$

求得 $$y'=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

积分： $$y=-(1-x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+C_2$$

由 $y'(0)=0$，有 $C_2=\frac{2}{3}$，

所以鱼雷的航行曲线为 $$y=-(1-x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}$$

案例 2[**减速问题**]当机场跑道长度不足的时候，常常使用减速伞作为飞机的减速装置，在飞机接触跑道开始着陆时，由飞机尾部张开一幅减速伞，利用空气对伞的阻力减少飞机的滑跑距离，保障飞机在较短的跑道上安全着陆。

(1)一架重 4.5T 的歼击机以每小时 600km 的航速开始着陆，在减速伞的作用下滑跑 500m 后速度减为每小时 100km,设减速伞的阻力与飞机的速度成正比，并忽略飞机所受的其他外力，试计算减速伞的阻力系数。

(2)将同样的减速伞装备在 9T 重的轰炸机上，已知机场跑道长 1500m,若飞机着陆速度为每小时 700km,问跑道长度能否保障飞机安全着陆?

解：(1)设飞机质量为 m,着陆速度为 v,若从飞机接触跑道时开始计时，飞机的滑跑距离为 $x(t)$,飞机的速度为 $v(t)=x'(t)$,减速伞的阻力为 $-kv(t)$,其中 k 为阻力系数。根据牛顿第二运动定律可得出运动方程为 $mv'(t)=-kv(t)$

而 $$v'(t)=v(t)\frac{dv}{dt}$$

故代入得可分离变量的方程

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{k}{m}$$

由此计算出 $$k=\frac{m[v_0-v(t)]}{x(t)}$$

将数据代入，得出阻力系数 $k=4500000$ (kg/h)

(2)由 $mv'(t)=-kv(t)$

得 $$v(t)=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$$

利用 $v(t)=x'(t)$ 再积分一次可得

$$x(t)=\frac{mv_0}{k}[1-e^{-\frac{k}{m}t}]\le\frac{mv_0}{k}$$

将数据代入可得 $\frac{mv_0}{k}=\frac{9000\times700}{4500000}=1400<1500$

所以飞机可以在此跑道上安全着陆。

第4节　二阶常系数线性微分方程

案例 1 [**浮筒震荡**]将直径为 0.5 米的圆柱形浮筒竖直放入水中，稍用力向下压后突然放开，若浮筒在水中上下振动的周期为 4 秒，求浮筒的质量。

解：建立坐标系，将原点设在水面处，y 轴的正向竖直向下，平衡状态时浮筒上一点 A 在水平面处，设在时刻 t，点 A 的位置 $y=y(t)$，此时受到浮力的大小为 $1000g\pi R^2|y|$（R 为浮筒的半径），浮力的方向与位移的方向相反，由牛顿第二定律

$ma=-1000g\pi R^2y$　　即 $my''=-1000g\pi R^2y$

记 $\omega^2=\frac{1000g\pi R^2}{m}$　　得 $y''+\omega^2y=0$

解二阶常系数齐次微分方程得

$$y(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$$

$\therefore$　$y=A\sin(\omega t+\varphi)$，其中 $A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\sin\varphi=\frac{C_1}{A}$

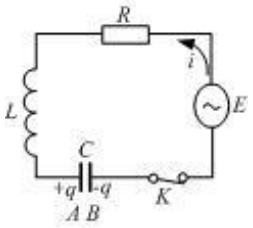
振动周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=4$，所以　$\omega=\frac{\pi}{2}$

即 $\frac{1000g\pi R^2}{m}=\frac{\pi^2}{4}$，　解得　　$m=\frac{4000gR^2}{\pi}\approx780$（kg）

案例 2[**RLC 电路**] 设有一个由电阻 R 、自感 L 、电容 C 和电源 E 串联组成的 RLC 串联电路，其中 R 、L 及 C 为常数，电源 E 为交流电动势 $E_0\sin\omega t$ ，这里 E_0 及 ω 也是常数．电路在电动势作用下，不断发生振荡，试建立描述电路中点振动的微分方程．

解 设电路中的电流为 $i(t)$，电容器极板上的电量为 $q=q(t)$，两极板间的电压为 u_c，自感电动势为 E_L．由电学知道

$i=\frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{d}t}$，$u_c=\frac{q}{C}$，$E_L=-L\frac{di}{dt}$.



由回路电压定律，得

$$E-L\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{d}t}-\frac{q}{C}-Ri=0,$$

即 $LC\frac{d^2u_c}{dt^2}+RC\frac{du_c}{dt}+u_c=E_0\sin\omega t$ ．这就是串联电路的振荡方程.

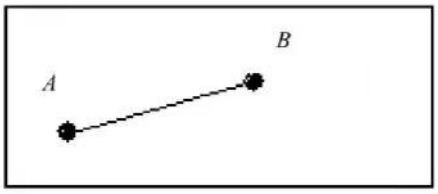
它是一个关于未知函数u_c的二阶常系数线性非齐次方程．它描述了在交流电压作用下，RLC 电路中的点振荡，这种振荡称为强迫振荡.

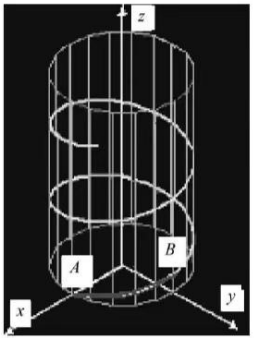
运用求解二阶常系数线性非齐次方程的方法，可以得到上述方程的解.

第五章　空间解析几何

第1节　几何应用

案例1［壁虎捕食］在一个圆柱形水泥管上，有一只壁虎位于A点处，它发现在右上方不远处的B点处停着一只苍蝇，为了不让苍蝇逃走，壁虎需寻找最快的进攻路线吃掉苍蝇，问壁虎应该走怎样的进攻路线?



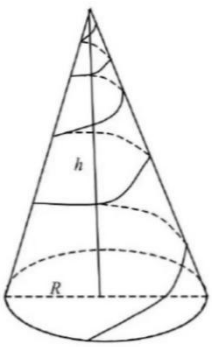


解：将圆柱形的侧面展开，得到一个矩形，在矩形上将A点与B点用直线连接，即得两点间最短距离。再将此矩形重新卷成之前的圆柱形，即得到壁虎吃掉苍蝇的最佳进攻路线。此路线即是圆柱螺线。

圆柱螺线的定义及方程如下：设$A(a,0,0), a>0$，壁虎从A点开始沿圆柱面运动，一方面以角速度ω绕z轴旋转，同时又以速度v沿z轴正方向运动，记点$B(x,y,z)$，则满足：

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \quad (0 \le t \le +\infty) \\ z = vt \end{cases}$$

案例2［曲线问题］有一锥形桶，底面半径为R，高为h。现沿桶身缠绕一条细绳。建立坐标系如图：以底面为xOy平面。要求细绳所在的曲线在每一点的切线与平行z轴的直线的夹角为$\frac{\pi}{4}$。缠绕细绳的起始点在$(R,0,0)$，试求细绳所在的曲线方程。



解：在曲线上任取一点为(x,y,z)。$\because \frac{h-z}{h} = \frac{r}{R}$

曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \\ z = h - \dfrac{h}{R}r(\theta) \end{cases} \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$

那么曲线在(x, y, z)的切向量为

$$\vec{n} = \{x'(\theta), y'(\theta), z'(\theta)\} = \{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta, r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta, \frac{h}{R} \quad r'(\theta)$$

z轴方向为$\vec{k} = \{0,0,1\}$

由题意 $\left(\vec{k}, \vec{n}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{k}\right|} = \frac{-\dfrac{h}{R}r'(\theta)}{\sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2 + [-\dfrac{h}{R}r'(\theta)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

上式两边平方化简得到

$$r'(\theta) = \frac{\pm Rr}{\sqrt{h^2 - R^2}}$$

根据实际意义 $r'(\theta) = \dfrac{dr}{d\theta} < 0$

所以 $$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-Rr}{\sqrt{h^2 - R^2}}, \int\frac{1}{r}dr = -\int\frac{R}{\sqrt{h^2 - R^2}}d\theta$$

解得 $r = r(\theta) = Ce^{\frac{R}{\sqrt{h^2-R^2}}\theta}$

又由初始条件$\theta = 0$时，$r = R$得$C = R$，故$r(0) = Re^{\frac{R}{\sqrt{h^2-R^2}}\theta}$

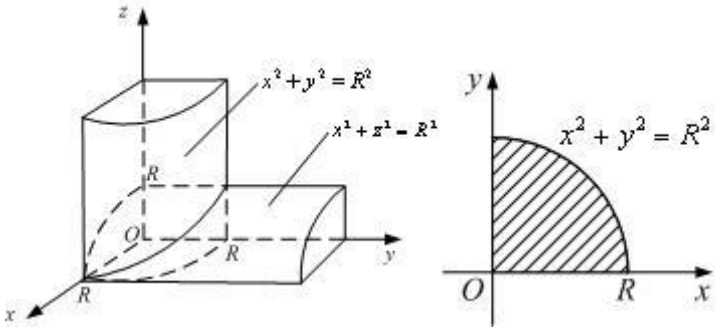
因而可以得到曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = Re^{\frac{R}{\sqrt{h^2-R^2}}\theta}\cos\theta \\ y = Re^{\frac{R}{\sqrt{h^2-R^2}}\theta}\sin\theta \\ z = h - he^{\frac{R}{\sqrt{h^2-R^2}}\theta} \end{cases} \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

案例3［求体积］求由圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与 $x^2+z^2=R^2$ 所围成的立体体积

解： 由于圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与 $x^2+z^2=R^2$ 围成的立体关于三个坐标柱面都对称，下图左画出了它在第一卦限的图形.

设所围体的体积为V，在第一卦限的体积为 V_1，由对称性可知，$V=8V_1$.



而 $V_1=\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2}\,d\sigma$，其中区域 D 如上图右所示，且区域 D 可表示为

$$\begin{cases}0\le x\le R\\ 0\le y\le \sqrt{R^2-x^2}\end{cases}$$

则 $V_1=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,dy=\int_0^R (R^2-x^2)dx=\frac{2}{3}R^3$

故所围立体的体积 $V=8V_1=\frac{16}{3}R^3$.

第2节　向量问题

案例1［相似判断］现有甲、乙、丙、丁四名男生，已知他们的身高、胸围和体重的数据如下表所示。试建立数学模型判断这四名男生中哪两人的体形最相似?哪两名男生的体形相差最远?

男生	身高（cm）	胸围（cm）	体重（kg）
甲	186	120	85
乙	170	100	63
丙	168	94	60
丁	178	110	78

解：下面用向量代数的方法来刻画男生体形的相似性问题。

设向量$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$,则两向量的夹角$\theta$的余弦可用向量的内积来表示。

$$\cos\theta=\frac{\alpha\cdot\beta}{|\alpha||\beta|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

男生的体形特征可以用身高、胸围、体重组成一个三维向 量来刻画。故可得4个向量分别代表男生甲、乙、丙、丁的体形特征。

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}186\\120\\85\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}170\\100\\63\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}168\\94\\60\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}178\\110\\78\end{pmatrix}$$

根据向量夹角的余弦公式，计算可得各向量之间夹角的余弦如下表所示。

向量夹角的余弦	α_1	α_2	α_3	α_4
α_1	0	0.9997	0.9998	0.9949
α_2	0.9997	0	1.0000	0.9966
α_3	0.9998	1.0000	0	0.9962
α_4	0.9949	0.9966	0.9962	0

向量之间夹角的余弦越大，表示两夹角的角度越小。向量α_2和α_3夹角的余弦最大约为1,故可得出男生乙和男生丙的体形最相似。向量α_1和α_4夹角的余弦最小约为0.9949,故可得出男生甲和男生丁的体形相差最远。

第六章　多元函数微分学

第1节　多元函数的最值

案例 1 [下料问题] 要用铁板做一个体积为 2 立方米的有盖长方体水箱，问当长、宽、高各取怎样的尺寸时，才能使用料最省？

解： 设长为 x 米，宽为 y 米，则其高应为 $\frac{2}{xy}$．此水箱所用材料的面积为

$$S = 2(xy + y\cdot\frac{2}{xy} + x\cdot\frac{2}{xy}) = 2(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}) \qquad (x > 0, y > 0)$$

$$S_x = 2(y - \frac{2}{x^2}) = 0 \quad S_y = 2(x - \frac{2}{y^2}) = 0$$

解上述方程组，得

$$x = \sqrt[3]{2},\ y = \sqrt[3]{2}$$

根据题意可知，水箱所用材料面积的最小值一定存在，并在区域 $D: x > 0, y > 0$ 内取得．又函数在区域 D 内只有唯一的驻点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$，因此，可以断定当 $x = \sqrt[3]{2}, y = \sqrt[3]{2}$ 时，S 取得最小值．即当水箱的长为 $\sqrt[3]{2}$ 米，宽 $\sqrt[3]{2}$ 米，高 $\sqrt[3]{2}$ 米时，做水箱所用的材料最省．

案例 2 [原料采购] 某公司在生产中使用 A 和 B 两种原料，已知 A 和 B 两种原料分别使用 x 单位和 y 单位可生产 U 单位的产品，这里

$$U(x, y) = 8xy + 32x + 40y - 4x^2 - 6y^2$$

并且 A 原料每单位的价值为 10 美元，B 原料每单位的价值为 4 美元，产品每单位的售价为 40 美元，求公司的最大利润 。

解：生产 $U(x, y)$ 单位的产品的总成本为 $10x + 4y$，总收入为 $40U(x, y)$，从而利润函数为

$$P(x, y) = 40U(x, y) - (10x + 4y)$$

$$= 40(8xy + 32x + 40y - 4x^2 - 6y^2) - 10x - 4y$$

$$= 320xy + 1270x + 1596y - 160x^2 - 240y^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x}=320y+1270-320x=0\\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=320x+1596-480y=0\end{cases}$$

解得驻点　　$(x_0,y_0)=(21.88125,17.9125)$

故 $P(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点达到最大值，即公司的最大利润为

$$P(21.88125,17.9125)\approx 28189 \text{（美元）}$$

案例 3［购物方案］小孙有 200 元钱，他决定用来购买两种急需物品：计算机磁盘和录音磁带．设他购买 x 张磁盘，y 盒录音磁带的效用函数（所谓效用函数，就是描述人们同时购买两种商品各 x 单位、y 单位时满意程度的量．而当效用函数达到最大值时，人们购物分配的方案最佳．）为 $U(x,y)=\ln x+\ln y$ 如果每张磁盘 8 元，每盒磁带 10 元，问他如何分配他的 200 元钱，才能达到最满意的效果?

解： 这是一个条件极值问题，既求 $U(x,y)=\ln x+\ln y$ 在约束条件 $8x+10y=200$ 之下的极值点,应用拉格朗日乘数法,定义拉格朗日函数：

$$L(x,y,\lambda)=\ln x+\ln y+\lambda(8x+10y-200)$$

$$L_x(x,y,\lambda)=\frac{1}{x}+8\lambda=0$$

$$L_y(x,y,\lambda)=\frac{1}{y}+10\lambda=0$$

$$L_\lambda(x,y,\lambda)=8x+10y-200=0$$

解得　$x_0=12.5$，$y_0=10$

根据本题的实际含义，取 $x_0=12$，$y_0=10$，即买 12 张磁盘，10 盒磁带的话，小孙最满意．

案例 4［易拉罐设计］铝制易拉罐最早出现在 20 世纪 50 年代末，它的发展非常 迅速，到 20 世纪末每年的消费量已有 1800 多亿只，是消费总量最大的一类金属罐。相应的用于制造铝制易拉罐的铝材消费量同样快速增长，1963 年几乎为零，1997 年已达 360 万吨， 占全球各种铝材总用量的 15%。资源的紧缺，促使铝制易拉罐生产厂商不断改进设计更新工艺，达到用料最省的目的。

现有某厂商为了生产一批容量为 330 毫升的固定厚度的圆柱形铝制易拉罐，怎样设计所用材料最省?（不考虑工艺等其他成本因素）

解：设铝制易拉罐得地面半径为 r cm， 高度为 h cm,表面积为 S，则有

目标函数：$S=2\pi rh+2\pi r^2 \quad r>0,h>0$

约束条件：$\pi r^2 h = 330$

设拉格朗日函数$L(r,h,\lambda) = 2\pi rh + 2\pi r^2 + \lambda(\pi r^2 h - 330)$

令 $\begin{cases} L_r = 2\pi h + 4\pi r + 2\lambda\pi rh = 0 \\ L_h = 2\pi r + \lambda\pi r^2 = 0 \\ L_\lambda = \pi r^2 h - 330 = 0 \end{cases}$

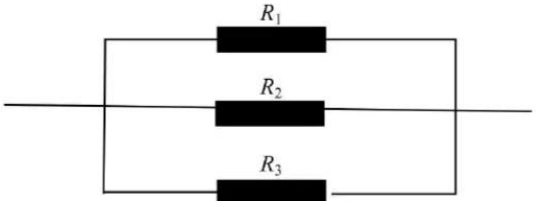
得唯一驻点$r = \sqrt[3]{\dfrac{165}{\pi}} \approx 3.75\,(\text{cm})$，$h = 2r \approx 7.50\,(\text{cm})$，

又因实际中铝制易拉罐所用材料最省存在，故所求出的唯一驻点即为所求材料最省的点，且此时易拉罐的表面积为

$S_{\min} = 2\pi rh + 2\pi r^2 \approx 265.02\,(\text{cm}^2)$

第2节　偏导数

案例 1 [并联电路] 有一并联电阻如图所示。



设其总电阻为R，每个电阻$R_1 > R_2 > R_3 > 0$，如果改变电阻R_1, R_2, R_3　　中某一个，问改变哪一个电阻会使总电阻的改变量为最大?

解：函数对某一个变量的偏导数，就是函数对该变量的变化率，因此需确定改变哪一个电阻能使总电阻的改变为最大，

只需看各自的偏导数就行。由电学知识得$\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$，于是有

$\dfrac{\partial R}{\partial R_i} = \dfrac{R^2}{R_i^2}(i = 1,2,3)$，由于$R_1 > R_2 > R_3 > 0$，故$\dfrac{\partial R}{\partial R_3}$最大，也就是改变$R_3$会使总电阻的改变量为最大。

案例 2 [相互关系] 工厂有x名技术工人和y名非技术工人，每天可以生产的产品产量为$f(x,y) = x^2 y$(件)，现在有 16 名技术工人和 32 名非技术工人，而厂长计划再雇佣 1 名技术工人。试求厂长如何调整非技术工人的人数，可以保持产品产量不变?

解：现在产品产量为 $f(16,32)=8192$ 件，保持这种产量的函数曲线为 $f(x,y)=8192$，对于任一给定值 x，每增加 1 名技术工人时 y 的变化量即为这函数曲线切线的斜率 $\frac{dy}{dx}$。

由隐函数求导法，可得非技术工人的变化量为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{2y}{x}$$

当 $x=16, y=32$ 时，可得 $\frac{dy}{dx}=-4$，

因此厂长要增加 1 名技术工人并保持产量不发生变化，就要相应的减少约 4 名非技术工人。

案例 3 [相互关系] 某企业有 x 名技术工人和 y 名技术工人生产某种产品，每月生产产品的产量 $Q=x^2+3xy+4y^2$，现有 10 名非技术工人和 5 名技术工人，企业经理因为人员调整，需要调走 2 名非技术工人，问若要让产量保持不变需要增加多少技术工人?

解：$Q_x=2x+3y, Q_x(10,5)=35$

即当 x 增加或者减少一个单位时，将大约带来产量 35 个的变化。

$Q_y=3x+8y, Q_y(10,5)=70$

即当 y 增加或者减少一个单位时，将大约带来产量 70 个的变化。

故如果调走 2 名非技术工人，则应相应的增加约 1 个技术工人。

$Q(10,5)=350,\quad Q(8,6)=352$

第3节　方向导数与梯度

案例 1 [追踪问题] 一条鲨鱼在发现血腥味时，总是沿着血腥味最浓的方向追寻。在海面上进行试验表明，如果把坐标原点取在血源处，在海平面上建立平面直角坐标系，那么点 (x,y) 处的血液浓度(每百万份水中所含血的份数)的近似值为 $C=e^{-\frac{x^2+2y^2}{10^4}}$，求鲨鱼从 点 (x_0,y_0) 出发向血源前进的路线。

解：设鲨鱼前进的路线为曲线 $L: y=f(x)$ 我们首先建立 $y=f(x)$ 应满足的

方程。鲨鱼追踪最强的血腥味，所以每一时刻它都将按照血液浓度变化最快，即C的梯度方向前进。由梯度的计算公式得

$$gradC=\{\frac{\partial C}{\partial x},\frac{\partial C}{\partial y}\}=10^{-4}\,e^{-\frac{x^2+2y^2}{10^4}}\,\{-2x,-4y\}$$

取鲨鱼前进的方向为曲线L的正向，相应方向的切线为正切线，正切线与x轴正方向的夹角为θ,如下图所示。

案例 2 [梯度问题]设以海平面为坐标面，某地某点为坐标原点，地形的高程函数为$u=x^4+4x^2y^2+2y^4,(x^2+y^2\le 20)$,在点 $P(1,1)$处。

(1)计算$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$的值并说明几何意义；

(2)求出高程增加最快和减少最快的方向及方向导数；

(3)求出高程无变化的方向。

解：(1) $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\left.(4x^3+8xy^2)\right|_{(1,1)}=12$

几何意义是在点$(1,1)$处高程值沿x轴正向的变化率。

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1)}=\left.(8x^2y+8y^2)\right|_{(1,1)}=16$$

几何意义是在点$(1,1)$处高程值沿y轴正向的变化率。

(2)高程值沿梯度方向增加最快。

$$gradu=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1)}\vec{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1)}\vec{j}=12\vec{i}+16\vec{j}$$

故所求方向可取梯度方向单位化后的值$\vec{n}=\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}$，方向导数即为梯度方向的高程变化率$|gradu|=20$,显然此值大于$x$轴正向和$y$轴正向的高程值变化率。高程值沿负梯度方向减少最快。取负梯度方向$-\vec{n}=-\frac{3}{5}\vec{i}-\frac{4}{5}\vec{j}$方向导数即为梯度方向的高程变化率$-|gradu|=-20$。

(3)沿着与梯度垂直的方向变化率为 0。 故可取方向$\vec{l}=-\frac{4}{5}\vec{i}+\frac{3}{5}\vec{j}$ 或$-\vec{l}=\frac{4}{5}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j}$,方向导数$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1)}\times(-\frac{4}{5})+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1)}\times\frac{3}{5}=0$。

案例 3 [下山路线]模仿一个球从山坡上滚下，必定是最快最短的下山路线。因为球必定时时刻刻沿着海拔高度下降最快的方向，也就是山坡曲面最陡的方向滚下去。设山坡曲面是函数$z=f(x,y)$，在点(x,y)处，z坐标上升最陡的方向是梯度方向$\nabla f=\{f_x,f_y\}$，下降最快的方向是梯度的反方向$-\nabla f=\{-f_x,-f_y\}$。球在任何时刻，任何点处，都处在过该点的曲面的等高线上。现在的结论是球滚下的方向必定与等高线垂直，即与等高线的切线垂直。

球滚下的路线是最快下山路线，在数学运算上也是寻找函数$z=f(x,y)$ 的极小值的最快的路线。在最优化科学里叫做最速降线法。

证明：设某条等高线是$f(x,y)=c$，相应的参数方程是$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，点$(x,y)$在等高线上，对应参数是$t$，函数$z=f(x,y)$在该点的梯度向量是$\{f_x,f_y\}$，等高线在该点的切线方向向量是$\{\varphi'(t),\psi'(t)\}$。需要证明$\{f_x,f_y\}$与$\{\varphi'(t),\psi'(t)\}$ 的内积为 0。

由于等高线在曲面上，所以无论t取何值，

$$z=f[\varphi(t),\psi(t)]\equiv 0$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}f[\varphi(t),\psi(t)]=f_x\cdot\varphi'(t)+f_y\cdot\psi'(t)=0,$$

即$\{f_x,f_y\}\cdot\{\varphi'(t),\psi'(t)\}=0$

案例 4 [梯度问题]设xOy平面上分布有电势，任意点(x,y)处的电势是

$$Z=12-4x^2-3y^2,$$

(1)问在点(1,1)处，沿哪个方向电势升高的最快?此时 升高的速率是多少?

(2)沿什么方向电势变化最慢?此时变化的速率是多少?

解：(1)沿电势函数的梯度方向，电势升高最快。具体是

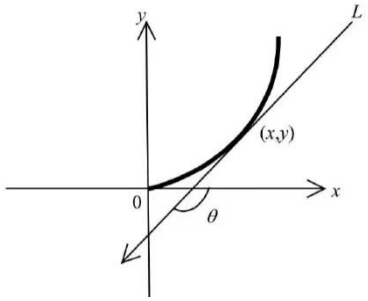
$$\{Z_x,Z_y\}=\{-8x,-6y\}\big|_{(1,1)}$$

方向为$\{-8,-6\}$，该方向指向原点。速率是梯度的模=10。

(2)沿等势线的方向变化率最小，等势线是曲线，其方向 是该点(1,1)处的切线方向，具体是点(1,1)代入函数得电势=5

补充：等势线方程是$7=12-4x^2-3y^2$，即$4x^2+3y^2=5$，切线方向是即(6,-8)。

此方向垂直于梯度(-8,-6)。因为等势线上的电势都是相等，电势不会改变，变化率为0。



则在L上点(x,y)处L的正切线上的方向向量$\vec{s}$可表为

$$\{\cos\theta,\sin\theta\}\text{或}\{1,\tan\theta\}=\{1,\frac{dy}{dx}\},$$

从而也可以表示为$\vec{s}=\{dx,dy\}$，显然$\vec{s}$与$gradC$同向，从而$\frac{dx}{-2x}=\frac{dy}{-4y}$，于是$y=f(x)$满足的方程为$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$，初始条件$y\big|_{x=x_0}=y_0$，方程的通解为$y=Ax^2$，代入初始条件得$A=\frac{y_0}{x_0^2}$，故$y=f(x)=\frac{y_0}{x_0^2}x^2$。

第七章　多元函数积分学

第1节　二重积分解决实际问题

案例1［**火山爆发**］设一火山的形状可以用曲面$z=he^{\frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{2h}}$来表示。在一次喷发后，有体积为8000m³ 的熔岩粘附在山上，假设该火山在喷发前的高度为10m,并将喷发后火山的形状视为与原来一样。求火山高度变化的百分比。

解：以V_0记火山喷发前的体积，V_1为喷发后的体积，h_1为喷发后火山的高度。于是$V=V_1-V_0=8000$ V=V₁-V=8000,要求的是$\frac{h_1-10}{10}\times 100\%$。

先计算火山喷发前的体积$V=\iint\limits_D he^{\frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{2h}}dxdy$,由于火山的底部很大，可以看待成无穷大，选用极坐标计算，有

$$V_0=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}he^{\frac{-\rho}{2h}}d\rho=2\pi h\cdot(-2h)[\rho\cdot e^{\frac{-\rho}{2h}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{\frac{-\rho}{2h}}d\rho]$$

$$=4\pi h^2\cdot(-2h)e^{\frac{-\rho}{2h}}\Big|_0^{+\infty}=8\pi h^3$$

由于$h=10$,于是，$V_1=8\pi h^3, V_0=8000\pi, V=8\pi h^3-8000\pi=8000$

$$h_1=\left(\frac{8000+8000\pi}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\approx 10.97\ (\text{m})$$

所以，火山高度变化的百分比为

$$\frac{h_1-10}{10}\times 100\%=\frac{10.97-10}{10}\times 100\%=9.7\%$$

案例2［**抛光处理**］已知某雕塑为曲顶柱体，现要对此雕塑的顶面$\begin{cases}x^2+z^2\le 4\\ z=xy\end{cases}$进行抛光打磨处理，若每平方米的处理费用为100 元，问该项处理的费用是多少?

解：该曲顶柱面的顶面的表面积

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho=2\sqrt{5}\pi\approx 14.05$$

即对雕塑顶面的抛光打磨处理需要约1405元。

案例3 **[陨石坑体积]**许多星球表面都有陨石坑，地球也有。一个巨大的陨石坑，可以看做是球面，球面半径非常大，有时会有几公里。但是这不是一个完整的半球面，只是一个相对于球的半径来说，深度很小很浅的球冠。可以测得坑内表面的曲率，进而得到曲率半径，可知该陨石坑球面的半径R。陨石坑边缘是圆，也能测得该圆半径r。现在已知R,r,求该陨石坑的体积V,以及平均深度h。

解：本例固然可用立体几何里球冠体积的公式，因为球面是一种简单曲面。假如远古的陨石坑由于风化作用，现在其内表面已不是球面，故不可用球冠公式。推广开来，环境工程里的一些湖泊的湖床曲面也不是球面，很多坑状物内表面都不是球面，而是椭球面，或者椭球正弦曲面等有着复杂方程的曲面，可使用微积分的方法统一解决。因此本题要使用二重积分求陨石坑的体积，而不用球冠体积公式。

设陨石坑内表面方程是

$$f(x,y)=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

陨石坑边缘是圆周，方程是$x^2+y^2=r^2$,所围成的区域记为D

体积 $$V=\iint_D|f(x,y)|dxdy-\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r\sqrt{R^2-\rho^2}d\rho-\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$$

$$=\frac{2}{3}\pi[R^3-(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}]$$

上式第一项是冠状体与柱体体积之和，第二项只是柱体体积，故两者要相减。

平均深度 $$h=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{2}{3}\frac{\pi[R^3-(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}]}{r^2}$$

注：本题第一问实际上应用了二元函数二重积分表示曲顶柱体体积。第二问应用了二元函数的积分中值定理：曲顶柱体 的平均高度，即二元函数的平均值，是二重积分除以定义域的面积。

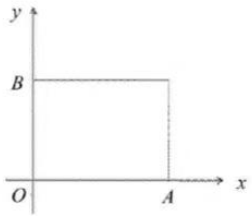
引申：h_m是湖底最深处的最大深度，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$是湖面边界，则湖床曲面是

$$f(x,y)=-h_m\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right),\quad D=\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\},$$

可计算湖水体积与平均深度。

案例4［地区降水］某地区城市分布呈矩形形状，东西长约为500km，南北长约为300km(如图，$OA=500\,\text{km}$，$OB=300\,\text{km}$)。受到各种因素的影响，该区域内年降水量受到与其地理位置的影响大致关系为$L(x,y)=0.1x+0.2y$(L/km²)。试求该地区总的降水量。

解：由二重积分，总的降水量



$$L=\int_0^{500}dx\int_0^{300}(0.1x+0.2y)dy=8.25\times10^6\ (\text{L})$$

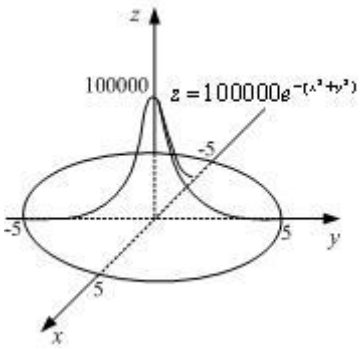
故该地区的降水总量为8.25×10⁶L。

案例5［城市人口密度］在对人口的统计中发现，每个城市的市中心人口密度最大．离市中心越远，人口越稀少，密度越小．最为常见的人口密度模型$\rho=ce^{-ar^2}$ (每平方公里人口数)，其中a，c为大于0的常数，r是距市中心的距离．为了确定起见，设市中心位于坐标原点(如下图)，城市半径r=5km．城市的任一点(x,y) 到原点的距离为$r=\sqrt{x^2+y^2}$ ．实际上人口密度函数$\rho(x,y)=ce^{-ar^2}$ ． 已知城市中心的人口密度为$r=0,\rho=10^5$ ；距离城市中心1km人口密度为$r=1,\rho=\frac{10^5}{e}$ ．试求该城市的总人口数R

解： 先确定常数a，c．

由$r=0,\rho=10^5$；$r=1,\rho=\frac{10^5}{e}$．可得到 $a=1,c=10^5$．

因此，该城市人口密度函数为 $\rho(x,y)=10^5e^{-(x^2+y^2)}$



因该城市是以半径为$r=5$ km的圆形区域，即

$$D:\begin{cases}0\le r\le 5\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

城市人口数为R，则$R=\iint\limits_D 10^5 e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^5 10^5\cdot e^{-r^2}rdr\approx 314159$

第2节　多元函数积分在物理上的应用

案例1[薄片质量]设以原点为圆心，半径为a的平面薄圆板的密度函数$\rho(x,y)=x^2+y^2$，求薄片的质量.

解： 该薄片在xOy面上的区域D在极坐标系下可表示为：$\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le r\le a\end{cases}$

则$M=\iint\limits_D\rho(x,y)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\cdot rdr=\frac{1}{2}\pi a^4$

案例2 [铸件质量]有一铸件，由抛物线$y=x^2$和$y-1=2x^2$围成的图形绕y轴旋转而成，试计算该铸件的质量(长度单位 cm，铸件密度是7.8g/cm³)

解：在空间直角坐标系中，曲线$y=x^2$绕y轴旋转而成的旋转曲面方程$y=x^2+z^2$。曲线$y-1=2x^2$绕y轴旋转而成的旋转曲面方程$y-1=2x^2+2z^2$。

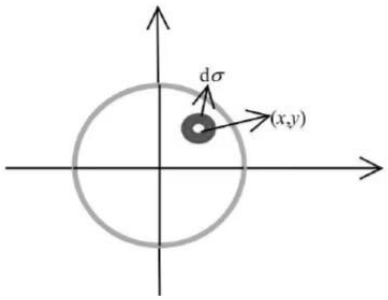
联解两曲面方程可得铸件在平面zOx上的投影区域为$D_{xz}:\begin{cases}x^2+z^2\le 1\\ y=0\end{cases}$

铸件的质量$m=7.8\times 10^3\iint\limits_{D_{xz}}(2x^2+2z^2+1-x^2-z^2)dxdz$

$$= 7.8\times10^3\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1(\rho^2+1)\rho d\rho = 11.7\times10^3\pi \approx 36756$$

即铸件的质量约为36756克。

案例3[**静压力**]设有半径为R的圆管道，如图



内部充满液体(密度为ρ),求液体对管道闸门(垂直于管道的轴)的静压力。

解：如图在管道闸门上建立坐标系，取圆心为坐标原点。

由于压强随点而变，所以闸门上静压力的分布是不均匀的，并且关于区域具有可加性。 因此这是在圆域$D=\{(x,y):x^2+y^2\le R^2\}$上的二重积分问题，在微小区域$(d\sigma)$上把非均匀分布的压力看作是均匀的，即把变化的压强看作不 变压强，有$P=(R-y)\rho g$

从而

$$F=\iint_D(R-y)\rho g d\sigma=\rho g\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho(R-\rho\sin\theta)d\rho=\rho g\pi R^3$$

第八章　级数

第1节　无穷级数的概念

案例 1［**分苹果**]有 A、B、C 三人按以下方法分一个苹果：先将苹果分成四份，每人各取一份；然后将剩下的一份又分成四份，每人又取一份，依此类推，以至无穷．验证：最终每人分得苹果的$\frac{1}{3}$.

解： 每人分得的苹果为$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{1}{3}$

案例 2［e**值的近似计算**］计算e的近似值，误差不超过10^{-4}.

解： 由 $e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$,

取前n项　　$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}$

则误差要求为 $|r_n|=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}<10^{-4}$

得$n=7$，$|r_7|<\frac{1}{8!}<10^4$，则　$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{7!}\approx 2.7183$

案例 3［存款问题]银行的存款年利率为$r=0.05$,并依年复利计算。某人希望通过存款A万元，实现第一年提取 15 万元，第二年提取 20 万元……,第n年提取(10+5n)万元，并能按此规律一直提下去。试问他应存款多少万元?

解：假设现在存款a_n万元，则n年后的本利和为

$$b_n=a_n(1+r)^n$$

则

$$a_n = b_n(1+r)^{-n}$$

即n年后提取b_n万元，则现在存款$a_n = b_n(1+r)^{-n}$。

所以现在应存总额为

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(1+r)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}(10+5n)\cdot 1.05^{-n}$$

现求上述级数之和，根据级数的和的定义，令

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(10+5k)\cdot 1.05^{-k}, \quad \frac{s_n}{1.05} = \sum_{k=1}^{n}(10+5k)\cdot 1.05^{-k-1}$$

两式相减：

$$\frac{0.05}{1.05}s_n = \sum_{k=1}^{n}(10+5k)\cdot 1.05^{-k} - \sum_{k=1}^{n}(10+5k)\cdot 1.05^{-k-1}$$

即

$$\frac{0.05}{1.05}s_n = \frac{15}{1.05} + \sum_{k=1}^{n-1}[10+5(1+k)]\cdot 1.05^{-k-1} - \sum_{k=1}^{n-1}[(10+5k)1.05^{-k-1} - (10+5n)1.05^{-n-1}]$$

$$= \frac{15}{1.05} + \sum_{k=1}^{n-1}1.05^{-k-1} - (10+5n)1.05^{-n-1} = \frac{15}{1.05} + 5\cdot\frac{(1-\frac{1}{1.05^{n-1}})\frac{1}{1.05^2}}{1-\frac{1}{1.05}} - (10+5n)1.05^{-n-1}$$

两边求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{0.05}{1.05}s_n = \frac{15}{1.05} + 5\cdot\frac{\frac{1}{1.05^2}}{1-\frac{1}{1.05}} = \frac{115}{1.05} = 2230$(万元)。

故他应存款 2230 万元 .

案例 4 [天然气产量]某油气田的经验数据信息显示，天然气在开采后第n年的产量可大致由下面的函数给出$Q(n) = an(0.98)^n$（百万米³)。其中，a为一常数，$a > 0$,试根据上述式子估计前n年的总产量。

解：$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q(n) = \sum_{k=1}^{\infty} ak(0.98)^k = a\sum_{k=1}^{\infty} k(0.98)^k = a\sum_{k=1}^{\infty} kq^k, q = 0.98$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} kq^k = \sum_{k=1}^{n}(k+1)q^k - \sum_{k=1}^{n} q^k = \sum_{k=1}^{n}(q^{k+1})' - \sum_{k=1}^{n} q^k$$

$$= [\sum_{k=1}^{n} q^{k+1}]' - \frac{q(1-q^n)}{1-q} = [\frac{q^2(1-q^n)}{1-q}]' - \frac{q(1-q^n)}{1-q}$$

$$= q\frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2} \qquad (\text{以 } q \text{ 为变量})$$

$$\therefore \quad Q = aq\frac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2} = a\times 0.98\frac{1-(n+1)\times 0.98^n+n\cdot 0.98^{n+1}}{(1-0.98)^2}$$

比如当 $a=0.085, n=20$ 时，

前 20 年总产量

$$Q = 0.085\times 0.98\frac{1-(20+1)\times 0.98^{20}+n\cdot 0.98^{21}}{0.02^2}\approx 17.493 \text{（百万米}^3\text{）}$$

案例 5［资源保护］级数与极限：某市森林资源丰富，砍伐木材可以出卖，砍伐后的土地还可以做其他用途，比如种植经济效益比木材更高的珍贵植物或养殖珍贵动物，或者发展房地产业。但是为了保持生态平衡，国家规定森林面积红线，砍伐掉的森林面积永远不能超过现有面积的 1/10。因此每年砍伐的森林面积只能逐年递减，并且以 1%的速度递减。问今年能砍掉的森林面积最多是现在森林面积的百分之几?

解：设有森林总面积 M 公顷。今年砍掉 x 公顷。则从今以后所有砍伐面积之和是

$$x + x\cdot 0.99 + x\cdot (0.99)^2 + \cdots + x\cdot (0.99)^n + \cdots \le \frac{M}{10}$$

上式左边求和 $\quad 100x \le \dfrac{M}{10}$

所以 $\quad x \le \dfrac{M}{1000}$

故今年最多只能砍掉 0. 1%的森林面积。

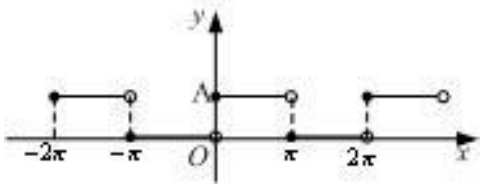
第2节　傅里叶级数

案例 1[矩形波] 电气工程师常用矩形波表示电闸重复地断开和接通时的电流模型，周期为 2π 的矩形波 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ A & 0 \le x < \pi \end{cases},$$

如下图所示，将函数 $f(x)$ 展开成傅立叶级数.

解： 计算傅立叶系数如下.



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}A\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(Ax)\Big|_0^{\pi}=A\ ;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos\ nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}A\cos nx\mathrm{d}x=\frac{A}{n\pi}(\sin nx)\Big|_0^{\pi}=0\ (n=1,2,\cdots)\ ;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}A\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{A}{n\pi}(\cos x)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{A}{n\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}\dfrac{2A}{n\pi} & n=1,3,5\cdots\\ 0 & n=2,4,6\cdots\end{cases}.$$

于是，矩形波的傅立叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n+1)}{2n+1}+\cdots]$$

$(-\infty<x<+\infty, x\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

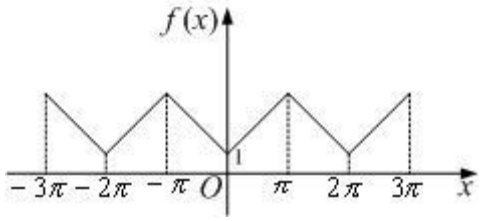
当$x=k\pi$时，收敛于$\frac{A}{2}$).

案例 2［脉冲三角信号］已知脉冲三角信号$f(x)$是以2π为周期的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & -\pi\le x<0\\ x+1, & 0\le x<\pi\end{cases},$$

如下图所示，将函数$f(x)$展开成傅里叶级数.

解：因为函数$f(x)$是偶函数，所以$f(x)\sin nx$是奇函数，因此它在$(-\pi,\pi)$上积分为零． 于是$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots)$



$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(x+1)^2\Big|_0^{\pi}=\pi+2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\left(x\sin nx+\frac{1}{n}\cos nx+\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi} & n=1,3,5\cdots\\ 0 & n=2,4,6\cdots\end{cases}.$$

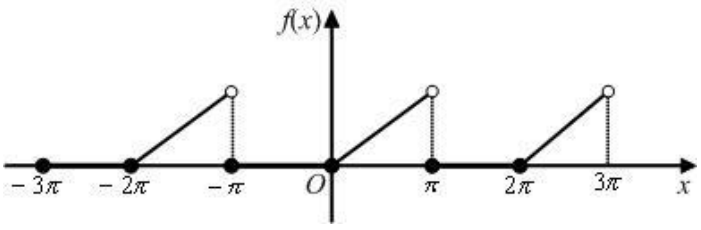
由于函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续，所以

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots)\ (-\infty<x<+\infty).$$

案例 3［锯齿脉冲信号］设锯齿脉冲信号函数 $f(x)$ 的周期为 2π，它在 $[-\pi,\pi)$ 的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x<\pi\end{cases},$$

如下图所示．将它展开成傅里叶级数．



解：函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数．计算傅里叶系数如下．

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}(\frac{x^2}{2})\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0 & n=2,4,6\cdots\\ -\dfrac{2}{n^2\pi} & n=1,3,5\cdots\end{cases},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

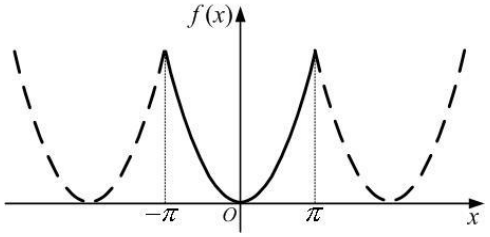
$$=\frac{1}{\pi}(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

于是，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2\cos 3x}+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots)}$$
$$+(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots)$$
$$(-\infty<x<+\infty\quad x\neq(2k-1)\pi\quad k\in Z)\ .$$

案例4［单脉冲信号的傅立叶级数展开式］有一定义在$[-\pi,\pi]$上的单脉冲信号函数 $f(x)=x^2$，如下图所示．将它展开成傅立叶级数．

解：将 $f(x)$ 作周期延拓，延拓后为偶函数，



则 $$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}(x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}x\sin nxdx)$$

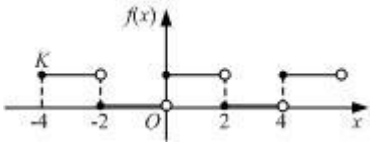
$$=\frac{4}{n^2\pi}\left(x\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx=\frac{4}{n^2}(-1)^n\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

延拓后，处处连续，所以

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots)\quad(-\pi\le x\le\pi)$$

案例 5[矩形脉冲信号] 设脉冲信号函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，它在一个周期 $[-2,2)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0 & -2\le x<0\\ k & 0\le x<2\end{cases}\quad k>0$$



如右图所示．将函数 $f(x)$ 展开成傅立叶级数．

解：按周期为 $2l$ 的函数展开成傅立叶级数的系数计算公式，这时 $l=2$，有

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}k\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}(kx)\Big|_0^2=k,$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}k\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{k}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}k\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{k}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2=\frac{k}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$=\frac{k}{n\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}\dfrac{2k}{n\pi} & n=1,3,5.\cdots\\ 0 & n=2,4,6,\cdots\end{cases}.$$

于是，函数 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right)$$

$$(-\infty<x<+\infty,x\ne0,\pm2,\pm4,\cdots;$$

在 $x=0,\pm2,\pm4,\cdots$ 处，收敛于 $\frac{k}{2}$）．

第3节　杂例

案例 1［单位阶跃函数］ 求单位阶跃函数的拉氏变换．

解：对于单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\ge0\end{cases}$，

当 $p>0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt$ 收敛，有

$$L[u(t)]=\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p}$$

案例 2［分段信号函数的表示］将分段信号函数 $f(t)=\begin{cases}\cos t & 0\le t<\pi\\ t & t\ge\pi\end{cases}$

用一个式子表示.

解：由 $\cos t[u(t)-u(t-\pi)]=\begin{cases}\cos t & 0\le t<\pi\\ 0 & t<0\text{或}t\ge\pi\end{cases}$，

$tu(t-\pi)=\begin{cases}0, & t<\pi\\ t, & t\ge\pi\end{cases}$，

所以，有 $f(t)=\cos t[u(t)-u(t-\pi)]+tu(t-\pi)=\cos t\,u(t)+(t-\cos t)\,u(t-\pi)$

案例 3［解二阶常系数线性微分方程］下面用拉氏变换求微分方程 $y''(t)-3y'(t)+2y(t)=3e^{-t}$ 满足初始条件 $y(0)=2,y'(0)=-1$ 的解.

解：设 $L[y(t)]=Y(p)=Y$，并对方程两端进行拉氏变换，则有

$$[p^2Y-py(0)-y'(0)]-3[pY-y(0)]+2Y=\frac{2}{P+1},$$

将初始条件 $y(0)=2,y'(0)=-1$ 代入上式，得代数方程的解

$$(p^2-3p+2)Y=\frac{2}{P+1}+2P-7$$

$$Y=\frac{2p^2-5p-5}{(p-1)(p+1)(p-2)},$$

将上式分解为

$$Y=\frac{\frac{1}{3}}{p+1}+\frac{4}{p-1}-\frac{\frac{7}{3}}{p-2},$$

再用拉氏逆变换还原为满足初始条件 $y(0)=2,y'(0)=-1$ 的微分方程解为 $y(t)=\frac{1}{3}e^{-t}+4e^{t}-\frac{7}{3}e^{2t}$.

案例 4［辐射与温度］太阳辐射以光速 $c=3\times10^8$ m/s 射向地球，同时它具有微粒和波动这两者的特性。在自然地理系统中，对于辐射能的接受和贮存，都离不开辐射能的这些特性。如绿色植物进行光合作用，所吸收的能量就是以光量子的形式

进行的。正是由于辐射能的这种量子特性，因此，量子能量的大小取决于波长和频率：

$$M = hv = \frac{hc}{\lambda} \qquad (1)$$

其中，M 为量子的能量；$h = 6.63\times10^{-34}$ 焦·秒为普朗克常数；v 为频率；λ 为波长；c 是光速。

不但太阳能发出辐射，自然界中的很多物质都能发出辐射。不同温度的物体向外辐射不同频率的电磁波。实验表明：辐射能力越强的物体，其吸收能力越强。能完全吸收照射到它表面上的各种频率光的物体称为黑体。地表面十分近似于一个黑体，因此它也具有类似于黑体发射时的规律。知道这种特性，对于了解自然地理系统中的能量转换，对于遥感技术的应用，是十分必要的。一个黑体的单位面积上所发射的辐射能，是由斯特藩—玻尔兹曼定律来描述的，即

$M(T) = \sigma T^4$， (2)

其中，$M(T)$ 为理想黑体所发射的能量，T 是用开氏温标表达时的绝对温度数值，σ 为斯特藩-玻尔兹曼常数，可以用已经制定好的表，查出在不同温度 T 时 $M(T)$ 的数值。

斯特藩-玻尔兹曼定律的证明要用到下述的普朗克黑体辐射公式。

按着普朗克的量子化假设，在单位时间内，从温度为 T 的黑体单位面积上，频率在 $v \to dv$ 范围内所辐射的能量为

$$M_v(T)dv = \frac{2\pi hv^3}{c^2}\frac{dv}{e^{hv/kT}-1} \qquad (3)$$

由式(3)，温度为 T 的黑体，在单位时间由单位面积上辐射出各种频率的电磁波能量总和为

$$M(T) = \int_0^{+\infty} M_v(T)dv = 2\pi hv^3c^{-2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^{hv/kT}-1}dv \qquad (4)$$

设 $x = hv/kT$，则 $v = \frac{kT}{h}x$，于是有 $dv = \frac{kT}{h}dx$。将其代入式（4）得

$$M(T) = 2\pi hc^{-2}(\frac{kT}{h})^4\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx \qquad (5)$$

根据函数的泰勒展开公式，当 $|z|<1$ 时，

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots,$$

$$\frac{x^3}{e^x-1}=x^3e^{-x}\frac{1}{1-e^{-x}}=x^3e^{-x}(1+e^{-x}+e^{-2x}+\cdots+e^{-nx}+\cdots)$$

$$=x^3(e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\cdots+e^{-nx}+\cdots) \qquad (6)$$

由广义积分的分部积分公式

$$\int_0^{+\infty}x^3e^{-nx}dx=\frac{3!}{n^4} \qquad (7)$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx=\int_0^{+\infty}x^3e^{-x}dx+\int_0^{+\infty}x^3e^{-2x}dx+\cdots+\int_0^{+\infty}x^3e^{-nx}dx+\cdots$$

$$=6(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots) \qquad (8)$$

由于$y=x^2(x-2\pi)$在$[0,2\pi]$上的傅里叶级数展开式为

$$y=\frac{8\pi^4}{15}-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cos n\pi x \qquad (9)$$

当$x=0$时，将$y=0$代入式(9)得

$$0=\frac{8\pi^4}{15}-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \qquad (10)$$

所以$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$,将其代入式(8)得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx=\frac{\pi^4}{15}$$

再将其代入式(5),斯特藩+玻尔兹曼公式得证。

案例 5 [龟兔赛跑]公元前 5 世纪，希腊哲学家 Zeno(齐诺)提出了一个关于传说中的古希腊英雄 Achilles (阿基勒)永远追不上一只乌龟的悖论：Achilles 与乌龟赛跑，假设开始时，乌龟在 Achilles 前面 1000m 处 ，Achilles 用乌龟速度的 10 倍追赶它，当 Achilles 跑完了这 1000m 时，乌龟向前跑了 100m,当 Achilles 再跑完这 100m 时，乌龟又向前跑了 10m……,如此下去，Achilles 永远追不上乌龟。你能用级数的知识来说明这个悖论实际上是一种诡辩么?

解：设乌龟的速度为v,则 Achilles 的速度为$10v$,他跑完 1000m 所花的时间为$\frac{100}{v}$,在这段时间内乌龟又爬了 100m。Achilles 为跑完这段路又花了时间$\frac{10}{v}$,此

时乌龟又在他前面 10m 处…以此类推，Achilles 需要追赶的全部路程为 1000+100+10+…，这是一个公比为$\frac{1}{10}$的等比级数，易求得和为$\frac{1000}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10000}{9}$,也就是说，如果赛程比这个距离短，则乌龟胜，如果赛程恰好等于这个距离，则双方平，否则 Achilles 就要在距离起点$\frac{10000}{9}$处追赶上并超过乌龟。